



**Università degli Studi di Padova**

**FACOLTÀ DI INGEGNERIA**  
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

Tesi di Laurea Triennale in  
**INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE**

Titolo della tesi

# **Raggiungibilità dei sistemi positivi a tempo discreto**

Relatrice

Ch.ma Prof.ssa Maria Elena Valcher

Laureanda

Laura Dal Col

Anno Accademico 2010/2011

---

*A mio nonno*

---

I sat upon the shore  
Fishing, with the arid plain behind me  
Shall I at least set my lands in order?  
London Bridge is falling down falling down falling down  
Poi s'ascose nel foco che gli affina  
Quando fiam ceu chelidon - O swallow swallow  
Le Prince d'Aquitaine a la tour abolie  
These fragments I have shored against my ruins  
Why then Ile fit you. Hieronymo's mad againe.  
Datta. Dayadhvam. Damyata.  
Shantih shantih shantih


T.S. Eliot , *The Waste Land*, 1922

# Introduzione

Lo scopo della mia tesi è quello di presentare i sistemi “positivi” a tempo discreto ovvero quei sistemi dinamici nei quali tutte le variabili in gioco assumono valori non negativi durante l’evoluzione temporale.

La condizione di positività, oltre ad essere di rilevante interesse pratico nei campi della biologia, dell’economia e della demografia, impone dei risultati teorici peculiari per quanto riguarda i concetti di stabilità, raggiungibilità, osservabilità e dinamica asintotica.

In particolare il mio interesse si è focalizzato sul tema della raggiungibilità, che nel caso di sistemi lineari positivi a tempo discreto si può affrontare usando due approcci: il primo è di tipo algebrico e riguarda la teoria dei coni, il secondo interessa la teoria dei grafi ed ha il vantaggio di essere visuale ed immediato. Entrambi i metodi verranno presi in considerazione e dove possibile messi a confronto per completare il quadro generale.

Verrà inoltre esaminata una particolare applicazione di questi concetti che riguarda il “*page ranking*” del motore di ricerca  modellato come sistema dinamico a tempo discreto del tipo catena di Markov.

Dove possibile ho omesso le dimostrazioni ed i passaggi più onerosi, riportando direttamente i risultati teorici accompagnati da esempi al fine di alleggerire la lettura.

# Indice

<b>1</b>	<b>Concetti preliminari</b>	<b>2</b>
1.1	Condizioni di positività . . . . .	2
1.2	Matrici di permutazione e matrici monomie . . . . .	4
1.3	Proprietà combinatorie dei sistemi positivi . . . . .	6
1.4	Riducibilità e Irriducibilità . . . . .	11
1.5	Ciclicità e Primitività . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Proprietà Spettrali</b>	<b>18</b>
2.1	Autovalori destri e sinistri . . . . .	18
2.2	Il Teorema di Perron-Frobenius . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Raggiungibilità</b>	<b>29</b>
3.1	Coni di $\mathbb{R}^n$ . . . . .	29
3.2	Coni di Raggiungibilità nei sistemi discreti positivi . . . . .	31
3.3	Catene di coni . . . . .	33
3.4	Completa raggiungibilità positiva . . . . .	40
3.4.1	Condizioni di completa raggiungibilità positiva . . . . .	40
3.4.2	Verifica della completa raggiungibilità attraverso il grafo di influenza . . . . .	43
<b>4</b>	<b>Il ranking di Google</b>	<b>49</b>
	<b>Appendice</b>	<b>58</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>62</b>

# Capitolo 1

## Concetti preliminari

### 1.1 Condizioni di positività

Nello spazio Euclideo  $n$ -dimensionale  $\mathbb{R}^n$ , consideriamo il sistema lineare, causale, proprio, tempo invariante a  $m$  ingressi e  $p$  uscite, descritto dalla coppia di equazioni ((1.1) se a tempo continuo, (1.2) se a tempo discreto) di aggiornamento dello stato e dell'uscita:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) & t \geq 0, t \in \mathbb{R}_+ \\ y(t) = Hx(t) \end{cases} \quad (1.1)$$

$$\begin{cases} x(k+1) = Fx(k) + Gu(k) & t \geq 0, k \in \mathbb{Z}_+ \\ y(k) = Hx(k) \end{cases} \quad (1.2)$$

o, equivalentemente, dalla terna  $\Sigma = (F, G, H)$ , dove  $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $H \in \mathbb{R}^{p \times n}$ . Per semplicità consideriamo come istante iniziale di applicazione dell'ingresso  $t = 0$ .

**Definizione 1.1.1.** [Sistema lineare positivo]

Un sistema lineare a tempo continuo (a tempo discreto)  $\Sigma = (F, G, H)$  si dice positivo se l'evoluzione dello stato e dell'uscita si mantengono entrambi non negativi ad ogni istante  $t \geq 0$ , a fronte di un qualsiasi andamento non negativo dell'ingresso e per qualsiasi stato iniziale nonnegativo, cioè se  $\forall u(t) \geq 0$  e  $\forall x(0) \geq 0 \Rightarrow x(t) \geq 0$  e  $y(t) \geq 0 \forall t \geq 0$  ( $\forall u(k) \geq 0$  e  $\forall x(0) \geq 0 \Rightarrow x(k) \geq 0$  e  $y(k) \geq 0 \forall k \geq 0$ ).

---

Per il sistema a tempo discreto (1.2) si verifica che il vincolo di non negatività su ciascuna componente dell'evoluzione di stato e dell'uscita per  $t \geq 0$ , per ogni ingresso  $u(t) \geq 0$  e stato iniziale  $x(0) \geq 0$ , è rispettato se e solo se ogni elemento delle matrici  $F, G, H$  è non negativo.

Introducendo la seguente notazione per le matrici a elementi non negativi  $A = [a_{ij}]$ , con  $a_{ij} \in \mathbb{R}_+$ , diremo che :

- $A \geq 0$  (la matrice  $A$  è “non negativa”) se  $a_{ij} \geq 0 \forall (i, j)$ , con  $i = 1, \dots, h$  e  $j = 1, \dots, k$ .
- $A > 0$  (la matrice  $A$  è “positiva”) se  $a_{ij} \geq 0 \forall (i, j)$ , ed  $\exists (ij) : a_{ij} > 0$ , con  $i = 1, \dots, h$  e  $j = 1, \dots, k$ .
- $A \gg 0$  (la matrice  $A$  è “strettamente positiva”) se  $a_{ij} > 0 \forall (i, j)$ , con  $i = 1, \dots, h$  e  $j = 1, \dots, k$ .

I sistemi positivi a tempo discreto sono dunque caratterizzati da matrici non negative, e verranno indicati nel seguito con  $\Sigma_+ = (F, G, H) \geq 0$ , con  $F \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ ,  $G \in \mathbb{R}_+^{m \times n}$ ,  $H \in \mathbb{R}_+^{p \times n}$ .

Per quanto riguarda il sistema a tempo continuo (1.1), il vincolo di positività è rispettato se e solo se la matrice  $F$  è di Metzler (con ciò intendendo che gli elementi al di fuori della diagonale sono non negativi, ovvero  $a_{ij} \geq 0 \forall (i, j), i \neq j$ ) e le matrici  $G$  e  $H$  sono positive.

Questa condizione è stata inserita per completezza, in quanto nel seguito verranno trattati prevalentemente sistemi a tempo discreto.

## 1.2 Matrici di permutazione e matrici monomie

Per i sistemi positivi è importante conservare il carattere di non negatività delle variabili e delle matrici del sistema. In generale il ricorso a trasformazioni di similarità, ovvero un cambiamento di base nello spazio di stato indotto da una matrice  $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  non singolare, non garantisce che le componenti di un vettore rimangano positive nel passaggio dalla "vecchia" alla "nuova" base.

La classe di trasformazioni di cui faremo uso per manipolare matrici e vettori in questo contesto sarà quindi molto meno generale del gruppo di similarità, e si riduce alle trasformazioni di *permutazione* e *congruenza*, che ora esamineremo in dettaglio.

Consideriamo innanzitutto le trasformazioni che operano una permutazione sull'insieme degli indici  $I = \{1, 2, \dots, n\}$  associati alle variabili di stato.

Formalmente alla permutazione  $\sigma : I \rightarrow I$ :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_{n-1} & i_n \end{pmatrix}$$

associamo la matrice di permutazione  $P_\sigma \doteq \begin{bmatrix} e_{i_1} & e_{i_2} & \dots & e_{i_{n-1}} & e_{i_n} \end{bmatrix}$

$$\text{dove } e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ \\ i-1 \\ i \\ i+1 \\ \\ n \end{matrix} \text{ è l'i-esimo vettore della base canonica.}$$

Essa trasforma i vettori della base  $[v_1 \ v_2 \ \dots \ v_{n-1} \ v_n]$  nella  $n$ -upla permutata  $[v_{i_1} \ v_{i_2} \ \dots \ v_{i_{n-1}} \ v_{i_n}] = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_{n-1} \ v_n] P_\sigma$ .

Analogamente, ad una trasformazione lineare rappresentata, rispetto alla base  $[v_1 \ v_2 \ \dots \ v_{n-1} \ v_n]$ , dalla matrice  $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , nella base permutata essa viene rap-



presentata (ricordando che  $P_\sigma^{-1} = P_\sigma^\top$ ) da:

$$\tilde{F} = P_\sigma^\top F P_\sigma = \begin{bmatrix} f_{i_1 i_1} & f_{i_1 i_2} & \cdots & f_{i_1 i_n} \\ f_{i_2 i_1} & f_{i_2 i_2} & \cdots & f_{i_2 i_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{i_n i_1} & f_{i_n i_2} & \cdots & f_{i_n i_n} \end{bmatrix}$$

in cui la medesima permutazione è applicata alle righe e alle colonne. Due matrici che differiscono per una similarità introdotta da una matrice  $P_\sigma$  di permutazione, si dicono *cogredienti*.

La congruedienza conserva il carattere di positività delle matrici nonché il numero di componenti non nulle di righe o colonne che si corrispondono nella permutazione.

Una classe più ampia di matrici rispetto a quelle di permutazione è data dalle matrici *monomie*. Esse si ottengono dalle matrici di permutazione moltiplicandole (a destra o a sinistra) per una matrice diagonale positiva non singolare:

$$M = \Delta P_\sigma = \begin{bmatrix} d_1 & & & & \\ & d_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & d_{n-1} & \\ & & & & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & & d_1 \\ & & & & \\ d_2 & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & d_{n-1} \\ & d_n & & & \end{bmatrix}$$

dove  $d_i > 0$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ , e le colonne (o le righe) delle matrici monomie vengono dette *vettori monomi*. In particolare diremo che un vettore  $v$  è *i-monomio* se  $v = \alpha e_i$ , per qualche  $\alpha \geq 0$ .

Le similarità indotte da matrici monomie corrispondono a permutazioni dei vettori di base accompagnate da moltiplicazione per una costante positiva. In pratica si tratta di un riordino delle variabili di stato ed un cambiamento delle unità di misura.

### 1.3 Proprietà combinatorie dei sistemi positivi

Molte proprietà dei sistemi positivi sono legate al fatto che gli elementi nelle varie posizioni delle matrici siano o meno nulli, ma non dagli specifici valori reali (positivi) da essi assunti. È quindi appropriato qualificare tali proprietà con l'attributo “strutturale”.

Data la natura intrinsecamente “combinatoria” di tali proprietà, possiamo affrontare questo studio ricorrendo all'algebra booleana e ai grafi di influenza per la rappresentazione di vettori e matrici.

A tal fine introduciamo una mappa dai reali positivi  $\mathbb{R}_+$  all'algebra di Boole a due elementi così definita:

$$\natural : \mathbb{R}_+ \rightarrow \{0,1\} : a_{ij} \mapsto a_{ij}^{\natural} = \begin{cases} 1 & \text{se } a_{ij} > 0 \\ 0 & \text{se } a_{ij} = 0 \end{cases}$$

Applicando l'operatore  $\natural$  ad ogni istanza del sistema a tempo discreto (1.2), cioè a ciascuna componente delle matrici  $(F, G, H) \geq 0$  e dei vettori di stato, di ingresso e di uscita  $x(t)$ ,  $u(t)$ ,  $y(t)$ , otteniamo così il nuovo sistema:

$$\begin{cases} x^{\natural}(k+1) = F^{\natural}x^{\natural}(k) + G^{\natural}u^{\natural}(k) & k \geq 0, \\ y^{\natural}(k) = H^{\natural}x^{\natural}(k) \end{cases}$$

o in notazione più sintetica  $\Sigma_+^{\natural} = (F^{\natural}, G^{\natural}, H^{\natural})$  che, inizializzato dallo stato  $x^{\natural}(0)$  e sollecitato dall'ingresso causale  $u^{\natural}(k)$ , fornisce l'immagine booleana del sistema  $\Sigma_+ = (F, G, H)$  inizializzato dallo stato  $x(0)$  e sollecitato dall'ingresso causale  $u(k)$ .

Osserviamo che l'operatore  $\natural$  non è iniettivo: esistono infatti infiniti sistemi del tipo  $\Sigma_+ = (F, G, H)$  che danno luogo allo stesso sistema booleano e questo è una diretta conseguenza del fatto che la mappa mette in evidenza solamente gli elementi non nulli dei vettori e delle matrici coinvolti nella dinamica del sistema, a prescindere dal loro valore numerico contingente. Ad esempio possiamo notare che le matrici di permutazione e monomia (si veda la Sezione 1.2)  $P_{\sigma}$  e  $\Delta P_{\sigma}$  hanno la stessa immagine booleana, cioè  $P_{\sigma}^{\natural} = (\Delta P_{\sigma})^{\natural}$ .

In alternativa alla rappresentazione booleana vettoriale e matriciale, possiamo associare al sistema positivo  $\Sigma_+ = (F, G, H)$  un *grafo* (o *rete*) di influenza. Questo strumento ci permette di “visualizzare” un sistema dinamico come fenomeno generato da reciproche catene causali dirette tra le variabili indipendenti (ingressi e stato presente) e dipendenti (stato futuro e misura). Vediamo ora come è possibile costruire questo grafo.

---

**Definizione 1.3.1.** [Grafo di influenza di un sistema lineare positivo]

Ad un sistema lineare positivo a tempo discreto  $\Sigma_+ = (F, G, H)$ , di dimensione  $n$ , con  $m$  ingressi e  $p$  uscite, si può associare un *grafo orientato*, che indicheremo con  $\mathfrak{D}(F, G, H)$ , costituito da  $n + m + p$  vertici indicati dalle variabili di stato  $(x_i, i = 1, \dots, n)$ , dagli ingressi  $(u_j, j = 1, \dots, m)$  e dalle uscite  $(y_l, l = 1, \dots, p)$ . Esso presenterà:

- un arco orientato dal vertice  $u_j$  al vertice  $x_i$  se l'elemento  $g_{ij} \neq 0$ ;
- un arco orientato dal vertice  $x_h$  al vertice  $x_i$  se l'elemento  $f_{ih} \neq 0$ ;
- un arco orientato dal vertice  $x_i$  al vertice  $y_l$  se l'elemento  $h_{li} \neq 0$ .

I coefficienti  $g_{ij}$ ,  $f_{ih}$ ,  $h_{li}$  vengono chiamati *coefficienti d'influenza* del sistema.

---

Alla luce di questa definizione possiamo comprendere appieno il concetto di “influenza diretta” tra variabili, infatti:

- Un arco orientato dal vertice  $u_j$  al vertice  $x_i$  nel grafo di influenza corrisponde al fatto che la componente  $j$ -esima del vettore di ingresso al passo  $k$  induca all'istante  $k+1$  uno stato caratterizzato da una componente  $i$ -esima è non nulla.
- Lo stato all'istante  $k+1$  presenta la componente  $x_i \neq 0$  se e solo se  $x_i$  è vertice terminale di (almeno) un arco avente origine in qualche vertice  $u_j, j = 1, \dots, m$ , oppure di un arco avente origine in qualche vertice  $x_i, i = 1, \dots, n$ , essendo la componente  $i$ -esima dello stato all'istante  $k$  non nulla.

- Un arco orientato dal vertice  $x_i$  al vertice  $y_l$  nel grafo di influenza corrisponde al fatto che la componente  $i$ -esima dello stato al passo  $k$  induca nello stesso istante un'uscita caratterizzata da una componente  $l$ -esima non nulla.

Quando si discute di una proprietà che riguarda ad esempio il sottosistema  $(F, G)$ , in termini di grafo di influenza ciò equivale a considerare il sottografo  $\mathfrak{D}(F, G)$ , ottenuto eliminando i  $p$  vertici  $y_1, \dots, y_p$  ed i relativi archi entranti.

Accanto alle influenze dirette è opportuno considerare le *influenze indirette*, ovvero quelle influenze realizzate tramite una catena di influenze dirette. Diciamo che una variabile indipendente ( $x_i$  o  $u_j$ ) influenza indirettamente una variabile dipendente ( $y_l$  o  $x_h$ ) se esiste un cammino orientato composto da  $k \geq 2$  archi che porta dalla prima alla seconda. Ci possiamo allora chiedere se per ogni coppia di variabili esista tra di esse un'influenza diretta o indiretta, cioè, in termini di grafo d'influenza, se i vertici corrispondenti siano topologicamente connessi. A tal fine possiamo ricorrere al seguente teorema:

---

**Teorema 1.3.1.** [Cammini in un grafo di influenza]

Consideriamo il grafo di influenza  $\mathfrak{D}(F, G, H)$  del sistema  $\Sigma_+ = (F, G, H)$ . Il numero di cammini di lunghezza  $k$  tra una coppia qualsiasi di vertici  $(x_j, x_i)$  del sottografo  $\mathfrak{D}(F)$  è pari all'elemento  $(i, j)$  della matrice  $F^{\natural k}$ . Il numero di cammini di lunghezza  $k$  tra il nodo  $u_j$  e il nodo  $x_i$  relativi al sottografo  $\mathfrak{D}(F, G)$  è dato dalla componente  $i$ -esima del vettore  $F^{\natural k-1} g_j^{\natural}$  dove  $g_j^{\natural} = \text{col}_j(G^{\natural})$ . Il numero di cammini di lunghezza  $k$  tra il nodo  $x_i$  e il nodo  $y_l$  relativi al sottografo  $\mathfrak{D}(F, H)$  è dato dalla componente  $i$ -esima  $\mathbf{e}_l^{\top} H F^{k-1}$ . Infine il numero di cammini di lunghezza  $k$  tra il nodo  $u_j$  e il nodo  $y_l$  relativi al grafo  $\mathfrak{D}(F, G, H)$  è dato dalla componente  $l$ -esima del vettore  $H^{\natural} F^{\natural k-2} g_j^{\natural}$  dove  $g_j^{\natural} = \text{col}_j(G^{\natural})$ .

---

*Dimostrazione.* Dimostriamo solamente la prima affermazione e ricorriamo al metodo di induzione sul numero di passi  $k$ . Notiamo innanzitutto che, per  $k = 1$ ,

se  $f_{ij}^{\natural} = 1$  (o equivalentemente  $f_{ij} > 0$ ) allora esiste un arco diretto dal vertice  $x_j$  al vertice  $x_i$ , pertanto la tesi è verificata. Supponiamo allora che l'affermazione sia vera al passo  $k$ -esimo, cioè l'elemento  $(i, j)$  della matrice  $F^{\natural k}$ , che indicheremo con  $f_{ij}^{\natural k}$ , sia pari al numero di cammini  $n_{ji}^k$  di lunghezza  $k$  tra i vertici  $x_j$  e  $x_i$  di  $\mathfrak{D}(F)$ . Allora i cammini  $n_{ji}^{k+1}$  di lunghezza  $k+1$  tra la coppia di vertici  $x_j$  e  $x_i$  possono essere ottenuti come concatenazione dell'arco che va da  $x_j$  a  $x_h$  con i cammini di lunghezza  $k$  tra la coppia  $x_h$  e  $x_i$  e dell'arco che va da  $x_j$  a  $x_h$  cioè:

$$n_{ji}^{k+1} = \sum_{h=1}^n n_{hi}^k f_{hj}^{\natural} = \sum_{h=1}^n f_{ih}^{\natural k} f_{hj}^{\natural} = f_{ij}^{\natural k+1}$$

e quindi la tesi è valida al passo  $k+1$ .  $\square$

**Esempio 1.1.** [Popolazione con stadi vitali]

Consideriamo una popolazione di farfalle: essa è composta da quattro stadi vitali (uovo, larva, pupa, adulto) di cui solo l'ultima è fertile. Ciascun individuo può appartenere ad un solo stadio vitale. Al termine di ogni periodo  $k$  viene osservato lo stato della popolazione: una certa frazione degli individui della classe  $i$ -esima,  $q_i > 0$ , rimane nella stessa classe, mentre un'altra frazione  $p_i > 0$  cambia di stadio. Ovviamente esiste un certo tasso di mortalità  $m_i \geq 0$  per gli individui di ciascuna classe e la relazione tra le tre quantità è data da:  $q_i = 1 - p_i - m_i$ ,  $\forall i = 1, 2, 3, 4$ .

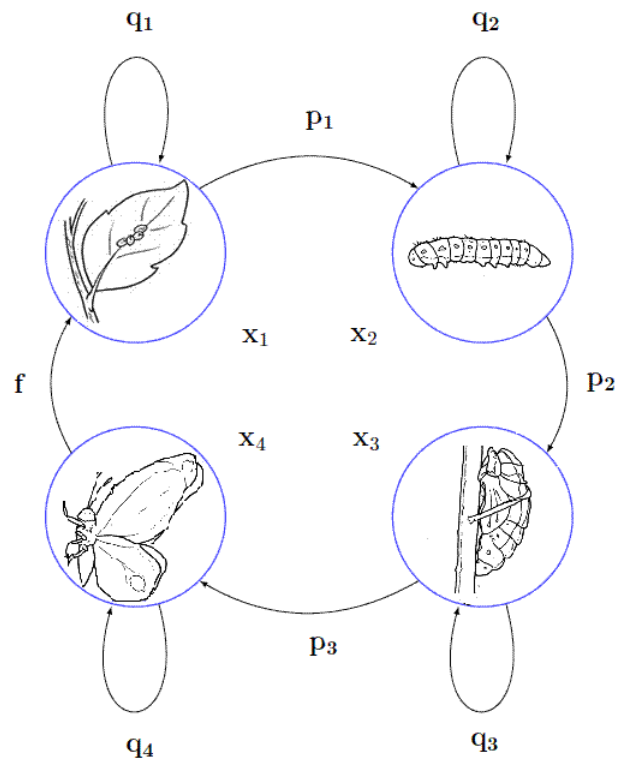
Notiamo che, per l'ultimo stadio evolutivo, si ha  $p_4 = 0$  e gli individui adulti si riproducono con un certo tasso di fertilità che indichiamo con  $f$ .

La matrice del sistema autonomo è:

$$A = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & 0 & f \\ p_1 & q_2 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & q_3 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & q_4 \end{bmatrix}$$

chiaramente abbiamo a che fare con un sistema positivo. A questo sistema possiamo associare la matrice booleana riportata di seguito e il grafo di influenza in Figura 1.1.

Figura 1.1: Grafo di influenza della popolazione con stadi vitali



$$A^{\natural} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Il numero di cammini di lunghezza  $k = 3$  è dato da:

$$A^{\natural 3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Si noti ad esempio che tra il nodo  $x_2$  e il nodo  $x_4$  sono presenti tre cammini di lunghezza pari a 3: il primo comprende gli archi  $(x_2, x_2)$ ,  $(x_2, x_3)$ ,  $(x_3, x_4)$  il secondo gli archi  $(x_2, x_3)$ ,  $(x_3, x_3)$ ,  $(x_3, x_4)$ , il terzo  $(x_2, x_3)$ ,  $(x_3, x_4)$ ,  $(x_4, x_4)$ .

## 1.4 Riducibilità e Irriducibilità

La riducibilità e irriducibilità dei sistemi positivi riguardano l'evoluzione libera delle variabili di stato e dunque sono proprietà che vanno riferite alla matrice di stato  $F$ .

---

**Definizione 1.4.1.** [Sistema positivo riducibile e irriducibile]

Il sistema lineare positivo a tempo discreto  $\Sigma_+ = (F, G, H)$ , di dimensione  $n \geq 2$ , è detto *riducibile* se l'evoluzione libera di un gruppo di  $n_1$  variabili di stato è indipendente dall'evoluzione delle rimanenti  $n_2 = n - n_1$  variabili di stato. Un sistema non riducibile è detto *irriducibile*.

---

Un sistema riducibile è caratterizzato da un grafo  $\mathfrak{D}(F)$  *non connesso* (diciamo che un grafo è *connesso* quando esiste un cammino tra ogni sua coppia ordinata di nodi  $(x_i, x_j)$  e ciò implica l'esistenza di almeno un ciclo passante per ogni nodo  $x_i$ ) e si possono individuare due sottografi  $\mathfrak{D}_1(F)$  e  $\mathfrak{D}_2(F)$  ciascuno

contenente rispettivamente  $n_1$  e  $n_2$  nodi tali che non vi siano archi diretti che vanno dai nodi di  $\mathfrak{D}_2(F)$  a quelli di  $\mathfrak{D}_1(F)$ .

Tramite un opportuno cambiamento di base nello spazio di stato, è possibile caratterizzare la riducibilità mediante la matrice del sistema  $F$ .

Sia  $P_\sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$  la matrice non singolare di cambio di base che effettua una rinumerazione delle variabili di stato in modo che quelle appartenenti al gruppo  $n_1$  abbiano indice inferiore rispetto a quelle del gruppo  $n_2$ . La trasformazione indotta da  $P_\sigma$  è pertanto una *permutazione* e gode della proprietà  $P_\sigma^{-1} = P_\sigma^\top$ .

È immediato verificare che la nuova matrice del sistema è *triangolare a blocchi*:

$$\tilde{F} = P_\sigma F P_\sigma^\top = \begin{bmatrix} F_{11} & 0 \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \quad \text{con } F_{11} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1} \text{ e } F_{22} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}.$$

Notiamo che lo *spettro* della matrice riducibile  $F$  è dato dall'unione degli spettri delle sottomatrici sui blocchi diagonali  $F_{11}$  e  $F_{22}$ .

Il processo di decomposizione in sottoinsiemi riducibili può eventualmente continuare su altri sottogruppi di variabili di stato, in modo che le sottomatrici sui blocchi diagonali abbiano ancora una struttura triangolare a blocchi. Al termine della riduzione abbiamo ottenuto una partizione del vettore di stato in *classi di comunicazione*: tutte le variabili vengono raggruppate in insiemi disgiunti  $C_1, C_2, \dots, C_k$  di cardinalità  $n_1, n_2, \dots, n_k$  con  $\sum_i n_i = n$ . Ciascuna classe di comunicazione  $C_i$  individua un sottosistema irriducibile di cardinalità  $n_i$ , che corrisponde ad un sottografo  $\mathfrak{D}_i(F)$  di  $\mathfrak{D}(F)$  topologicamente connesso. La matrice di stato del sistema può dunque essere portata (tramite un'opportuna matrice di permutazione  $P_\sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ) nella forma:

$$\tilde{F} = P_\sigma F P_\sigma^\top = \begin{bmatrix} F_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ F_{21} & F_{22} & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ F_{k1} & F_{k2} & \cdots & F_{kk} \end{bmatrix}, \quad F_{ii} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i} \quad i = 1, \dots, k$$

e ciascuna matrice  $F_{ii}$ , con  $i = 1, \dots, k$  corrisponde ad un sottosistema irriducibile.



Esiste una corrispondenza biunivoca tra le classi di comunicazione  $C_1, C_2, \dots, C_k$  e le sottomatrici sui blocchi diagonali  $F_{11}, F_{22}, \dots, F_{kk}$ .

**Definizione 1.4.2.** [Forma canonica riducibile]

La matrice di stato  $F$  del sistema positivo a tempo discreto  $\Sigma_+ = (F, G, H)$  è in *forma canonica riducibile* (o *forma canonica riducibile di Frobenius*) se è del tipo:

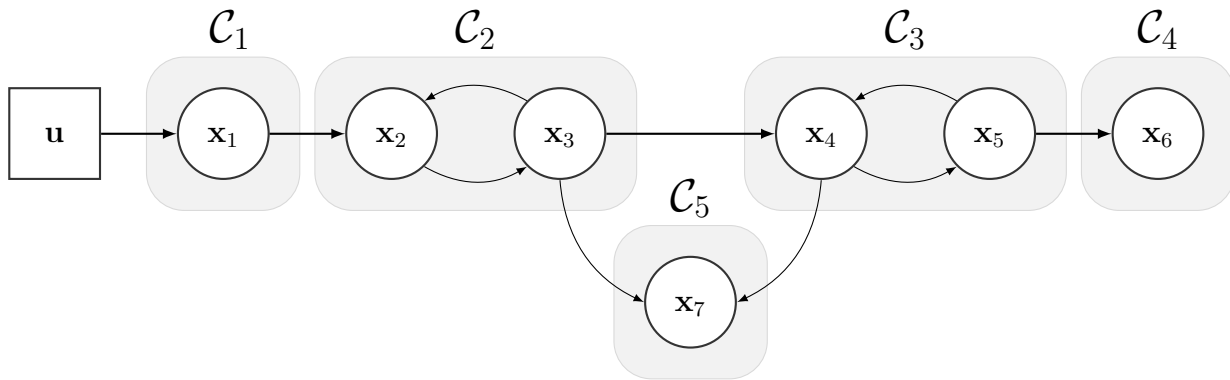
$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ F_{21} & F_{22} & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ F_{k1} & F_{k2} & \cdots & F_{kk} \end{bmatrix}$$

dove tutte le sottomatrici  $F_{ii}$ , con  $i = 1, \dots, k$ , sui blocchi diagonali sono irriducibili o sono matrici nulle  $1 \times 1$ ; corrispondono cioè a sottosistemi irriducibili.

**Esempio 1.2.** [Catena di produzione con test di qualità]

Consideriamo un modello di produzione a stadi successivi con ripetuti test di qualità. Vediamo come possiamo determinare le classi di comunicazione del sistema con un algoritmo di “etichettamento” dei vertici del grafo. Il grafo di influenza è riportato in Figura 1.2.

Figura 1.2: Grafo di influenza di una catena di produzione con test di qualità



Prendiamo in considerazione il nodo  $x_1$ : come si può vedere non esistono *stati in comunicazione* con esso (diciamo che due stati  $x_1$  e  $x_2$  *comunicano* se esiste un cammino da  $x_1$  a  $x_2$  e un cammino da  $x_2$  a  $x_1$ ). Infatti, anche se il nodo  $x_1$  influenza il nodo  $x_2$ , non c'è però l'influenza dal nodo  $x_2$  al nodo  $x_1$ . Pertanto, la prima classe di comunicazione sarà  $C_1 = \{x_1\}$ . Il nodo  $x_2$  è in comunicazione con il solo nodo  $x_3$  e pertanto sarà  $C_2 = \{x_2, x_3\}$ . Analogamente si ricavano le altre classi di comunicazione:  $C_3 = \{x_4, x_5\}$ ,  $C_4 = \{x_6\}$  e  $C_5 = \{x_7\}$ . Di conseguenza la matrice complessiva sarà composta da 5 blocchi sulla diagonale principale, ciascuno di dimensioni pari al numero di nodi che compongono la classe di comunicazione. In questo caso, la matrice del grafo è già in forma canonica riducibile:

$$F^{\natural} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \mathbf{0} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

## 1.5 Ciclicità e Primitività

Vediamo come i sistemi irriducibili possono essere ulteriormente caratterizzati.

---

**Definizione 1.5.1.** [Sistema positivo ciclico e primitivo]

Un sistema positivo *irriducibile*  $\Sigma_+ = (F, G, H)$  si dice *ciclico* se esiste una partizione delle variabili di stato in classi di comunicazione  $C_1, C_2, \dots, C_r$ , con  $r > 1$ , tale che:

- tutti i nodi della classe  $C_i$  influenzano solo i nodi della classe successiva  $C_{i+1}$ ,  $\forall i = 1, \dots, r - 1$ ;
- i nodi della classe  $C_r$  influenzano direttamente solo i nodi della classe  $C_1$ .

Se valgono tali proprietà gli insiemi  $C_1, C_2, \dots, C_r$  prendono il nome di *classi di ciclicità* e l'intero  $r > 1$  è detto *indice di ciclicità*. Un sistema *irriducibile* ma *non ciclico* è definito *primitivo*. Per i sistemi *primitivi* si ha che  $r = 1$ .

Il grafo di un sistema ciclico ha la proprietà che la lunghezza di tutti i suoi cicli è pari o è un multiplo dell'indice di ciclicità  $r$ .

Viceversa, se il massimo comun divisore delle lunghezze di tutti i cicli relativi al grafo di un sistema  $\Sigma_+ = (F, G, H)$  è pari a  $M > 1$  ciò implica che il sistema verifica le condizioni di ciclicità e l'indice di ciclicità del sistema è  $r = M$ .

Quest'ultima condizione ci permette di stabilire la ciclicità di un sistema tramite il calcolo e il confronto delle lunghezze di tutti i cicli del suo grafo di influenza.

In alternativa abbiamo a disposizione la seguente condizione sufficiente di primitività:

---

**Teorema 1.5.1.** [Condizioni sufficienti per la primitività]

Un sistema positivo *irriducibile*  $\Sigma_+ = (F, G, H)$  è *primitivo* se vale almeno una delle seguenti condizioni:

- il grafo  $\mathfrak{D}(F)$  contiene un autoanello;
- il grafo  $\mathfrak{D}(F)$  contiene un triangolo di archi del tipo  $(i, j)$ ,  $(i, h)$ ,  $(h, j)$ .

---

*Dimostrazione.* Supponiamo per assurdo che il sistema non sia primitivo, ovvero che sia ciclico con indice di ciclicità  $r > 1$ . Sotto tali ipotesi i cicli contenuti nel grafo di influenza associato al sistema hanno lunghezza  $r$  o  $kr$ , con  $k = 2, 3, \dots$ . L'esistenza di un autoanello  $(i, i)$  o di un triangolo di archi  $(i, j)$ ,  $(i, h)$ ,  $(h, j)$  implica che per il nodo  $i$  passi anche un ciclo di lunghezza  $r+1$  o  $kr+1$ . Assurdo.  $\square$

Anche nel caso di sistemi ciclici possiamo ricondurci ad un'espressione "canonica" per la matrice di stato  $F$  tramite un'opportuna rienumerazione degli indici: tramite una matrice di permutazione  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  si riordinino le variabili di stato in modo tale che le prime  $n_1$  appartengano alla classe  $C_1$ , le  $n_2$  variabili successive alla classe  $C_2$  e così via. La nuova matrice del sistema ciclico è del tipo:

$$\tilde{F} = PFP^\top = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & F_{1r} \\ F_{21} & 0 & & 0 \\ 0 & F_{32} & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & F_{r,r-1} & 0 \end{bmatrix}$$

con  $F_{i,i-1} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_{i-1}}$   $i = 2, \dots, r$   $F_{1,r} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_r}$

---

**Definizione 1.5.2.** [Forma canonica di Frobenius]

La matrice di stato  $F$  del sistema positivo ciclico a tempo discreto  $\Sigma_+ = (F, G, H)$  è in *forma canonica di Frobenius* se è del tipo:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & F_{1r} \\ F_{21} & 0 & & 0 \\ 0 & F_{32} & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & F_{r,r-1} & 0 \end{bmatrix}$$

dove  $r$  è l'indice di ciclicità del sistema.

---

I sistemi primitivi sono caratterizzati da una proprietà che ora metteremo in evidenza:

---

**Teorema 1.5.2.** [Condizioni di primitività]

Un sistema positivo *irriducibile*  $\Sigma_+ = (F, G, H)$  è *primitivo* se esiste un intero  $m > 0$  tale che  $F^m \gg 0$  o equivalentemente se esistono nel grafo  $\mathfrak{D}(F)$  cammini della stessa lunghezza  $m$  tra ogni coppia di nodi.

Il più piccolo intero  $m$  per cui questa condizione viene verificata è definito *indice di primitività* del sistema  $\Sigma_+$ .

Vediamo ad esempio che il sistema dinamico dell'Esempio 1.1 è primitivo, infatti la terza potenza della matrice di stato è:

$$A^{\natural 3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \gg 0$$

E siccome  $A^{\natural 2}$  non è strettamente positiva,  $m = 3$ . Alternativamente, potevamo notare che il grafo  $\mathfrak{D}(F)$  conteneva almeno un autoanello e dalla condizione sufficiente data nel Teorema 1.5.1 concludere che il sistema è primitivo.

# Capitolo 2

## Proprietà Spettrali

Lo scopo di questo capitolo è quello di analizzare la struttura dello spettro della matrice di stato  $F$  e le proprietà che derivano dalle ipotesi di non negatività.

Il risultato più importante su questo argomento è stato conseguito inizialmente da Perron [1907] che formulò un teorema la cui validità è circoscritta alle matrici strettamente positive e alle matrici primitive.

In seguito Frobenius [1912] elaborò una formulazione più generale, estesa alle matrici irriducibili, ed evidenziò la struttura peculiare dello *spettro periferico*, ovvero degli autovalori a massimo modulo. Premettiamo all'enunciato del Teorema di Perron una sezione relativa agli autovalori *destri* e *sinistri* di una matrice: le considerazioni qui sviluppate saranno utili al fine della dimostrazione.

### 2.1 Autovalori destri e sinistri

Consideriamo una generica matrice  $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ : accanto agli *autovettori destri*, cioè i vettori colonna non nulli  $v \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ , che soddisfano la relazione  $Fv = \lambda v$ ,  $\exists \lambda$ , è di interesse considerare anche gli *autovettori sinistri*, cioè i vettori riga non nulli  $w^\top \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ , che soddisfano la relazione  $w^\top F = w^\top \lambda$ ,  $\exists \lambda$ .

È possibile applicare la teoria della base di Jordan, cioè trovare una base di autovettori generalizzati, rispetto alla quale la matrice di stato del sistema sia in forma di Jordan, sia operando con gli autovettori (generalizzati) destri che con

quelli sinistri. Vediamo come possiamo arrivare a questo risultato.

Se  $\lambda \in \mathbb{C}$  è autovalore della matrice  $F$ , la struttura della base di Jordan formata da autovettori generalizzati *destri* dipende dalle proprietà del sottospazio

$$\ker(F - \lambda I)^\mu = \left\{ v \in \mathbb{R}^{n \times 1} : (F - \lambda I)^\mu v = 0, v \neq 0 \right\},$$

dove  $\mu \geq 1$  è la molteplicità di  $\lambda$  nel polinomio minimo di  $F$ . Più specificatamente, la costruzione delle catene di Jordan relative a  $\lambda$  dipende dalla sequenza di sottospazi strettamente crescente

$$\ker(F - \lambda I) \subset \ker(F - \lambda I)^2 \subset \cdots \subset \ker(F - \lambda I)^\mu.$$

Un vettore  $v \in \ker(F - \lambda I)^i \setminus \ker(F - \lambda I)^{i-1}$  rappresenta un *autovettore generalizzato di ordine  $i$*  relativo a  $\lambda$ , fatto che viene di norma evidenziato usando la notazione  $v^{(i)}$  per il vettore in questione. Gli *autovettori generalizzati di ordine 1*, ovvero gli *autovettori propri* di  $F$ , relativi a  $\lambda$  si trovano dalla soluzione dell'equazione  $(F - \lambda I)v = 0$  ovvero da  $Fv = \lambda v$ . Posto  $\delta_i \doteq \dim \ker(F - \lambda I)^i - \dim \ker(F - \lambda I)^{i-1}$ , si può dimostrare che

$$\delta_\mu \leq \delta_{\mu-1} \leq \cdots \leq \delta_1.$$

Si selezionano allora in  $\ker(F - \lambda I)^\mu$  un numero  $\delta_\mu$  di vettori che siano linearmente indipendenti tra di loro e linearmente indipendenti dal sottospazio vettoriale  $\ker(F - \lambda I)^{\mu-1}$ . Tali vettori,  $v_1^{(\mu)}, v_2^{(\mu)}, \dots, v_{\delta_\mu}^{(\mu)}$  sono autovettori generalizzati di ordine  $\mu$ . Attraverso la posizione

$$(F - \lambda I)v_k^{(\mu)} = v_k^{(\mu-1)}, \quad k = 1, 2, \dots, \delta_\mu,$$

otteniamo  $\delta_\mu$  autovettori generalizzati di ordine  $\mu - 1$ . Se  $\delta_{\mu-1} > \delta_\mu$  aggiungiamo a tali vettori altri  $\delta_{\mu-1} - \delta_\mu$  vettori,  $v_k^{(\mu-1)}, k = \delta_\mu + 1, \delta_\mu + 2, \dots, \delta_{\mu-1}$ , in modo tale che i vettori  $v_k^{(\mu-1)}, k = 1, 2, \dots, \delta_{\mu-1}$  siano linearmente indipendenti tra di loro e linearmente indipendenti dal sottospazio vettoriale  $\ker(F - \lambda I)^{\mu-2}$ . Tali vettori,  $v_1^{(\mu-1)}, v_2^{(\mu-1)}, \dots, v_{\delta_{\mu-1}}^{(\mu-1)}$  sono autovettori generalizzati di ordine  $\mu - 1$ . Procedendo in questo modo si arriva alla derivazione degli autovettori generalizzati di ordine 1, ovvero degli autovettori, attraverso la posizione

$$(F - \lambda I)v_k^{(2)} = v_k^{(1)}, \quad k = 1, 2, \dots, \delta_2,$$

e l'eventuale aggiunta di  $\delta_2 - \delta_1$  autovettori linearmente indipendenti dai precedenti. In questo modo abbiamo costruito, partendo dall'alto,  $\delta_1 = \dim \ker(F - \lambda I)$  catene di autovettori generalizzati, tutti linearmente indipendenti tra di loro, che formano una base per  $\ker(F - \lambda I)^\mu$ . Si noti che tali catene sono in numero pari alla molteplicità geometrica di  $\lambda$ .

I vettori di una *catena massimale di Jordan*, di lunghezza pari a  $\mu$ , sono indicati con  $\mathcal{C}_1 = \{v_1^{(1)}, v_1^{(2)}, \dots, v_1^{(\mu)}\}$  e soddisfano:

$$\begin{aligned}(F - \lambda I)v_1^{(1)} &= 0 \\ (F - \lambda I)v_1^{(2)} &= v_1^{(1)} \\ &\vdots \\ (F - \lambda I)v_1^{(\mu)} &= v_1^{(\mu-1)}\end{aligned}$$

Possiamo adattare questo ragionamento (con le dovute modifiche) agli autovettori *sinistri*: basta notare che  $w^\top F = w^\top \lambda \iff F^\top w = \lambda w$  dunque i vettori che soddisfano l'equazione  $w^\top (F - \lambda I) = 0$  sono gli autovettori *destri* di  $F^\top$  relativi a  $\lambda$ . Possiamo quindi applicare il procedimento sopra esposto alla matrice  $F^\top$ .

Troveremo gli *autovettori propri*  $\{w_1^{(1)}, \dots, w_{\delta_1}^{(1)}\}$  di  $F^\top$  e associate a ognuno di essi le *catene di Jordan*  $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_{\delta_1}$ .

Vale la pena di notare che il numero e la lunghezza delle catene di vettori generalizzati *destri* e *sinistri* sono le stesse. Valgono infatti le seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned}\dim \ker(F - \lambda I)^\nu &= n - \text{rank}(F - \lambda I)^\nu = n - \text{rank}(F - \lambda I)^{\nu^\top} \\ &= n - \text{rank}(F^\top - \lambda I)^\nu = \dim \ker(F^\top - \lambda I)^\nu, \quad \forall \nu \geq 0\end{aligned}$$

Di conseguenza, la prima catena di Jordan di autovettori generalizzati sinistri relativa a  $\lambda$  ha a sua volta lunghezza  $\mu$ .

È facile verificare che autovettori destri e sinistri di  $F$  corrispondenti ad autovalori distinti sono ortogonali: sia  $v_i$  autovettore destro relativo all'autovalore  $\lambda_i$  e  $w_j^\top$  autovettore sinistro relativo all'autovalore  $\lambda_j$ , allora



$$\begin{aligned}
 w_j^\top F v_i &= w_j^\top \lambda_j v_i = \lambda_j w_j^\top v_i \\
 w_j^\top F v_i &= w_j^\top \lambda_i v_i = \lambda_i w_j^\top v_i \\
 \Rightarrow (\lambda_j - \lambda_i) w_j^\top v_i &= 0 \\
 \Rightarrow w_j^\top v_i &= 0 \text{ se } \lambda_j \neq \lambda_i
 \end{aligned}$$

Pertanto diciamo che gli insiemi di autovettori destri  $v_1^{(1)}, \dots, v_{\delta_1}^{(1)}$  e degli autovettori sinistri  $w_1^{(1)}, \dots, w_{\delta_1}^{(1)}$  relativi ad autovalori distinti della matrice  $F$  formano un *sistema biortogonale*.

Questo risultato si può estendere anche agli autovettori generalizzati:

- sia  $v_i^{(\nu)}$  il  $\nu$ -esimo elemento della  $i$ -esima catena di Jordan *destra*  $\mathcal{C}_i$  relativa all'autovalore  $\lambda_1$ , da cui  $(F - \lambda_1 I)v_i^{(\nu)} = v_i^{(\nu-1)}$ ;
- sia  $w_j^{\top(\pi)}$  il  $\pi$ -esimo della  $j$ -esima catena di Jordan *sinistra*  $\mathcal{C}_j$  relativa all'autovalore  $\lambda_2$ , da cui  $w_j^{\top(\pi)}(F - \lambda_2 I) = w_j^{\top(\pi-1)}$ , con  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ .

Allora, sfruttando un ragionamento induttivo sull'ordine degli autovettori (il cui caso elementare, ovvero relativo all'ordine 1, abbiamo dimostrato prima), si ottiene

$$\begin{aligned}
 w_2^{\top(\pi)} F v_i^{(\nu)} &= w_2^{\top(\pi)} \lambda_2 v_i^{(\nu)} + w_2^{\top(\pi-1)} v_i^{(\nu)} = \lambda_2 w_2^{\top(\pi)} v_i^{(\nu)} \\
 w_2^{\top(\pi)} F v_i^{(\nu)} &= w_2^{\top(\pi)} \lambda_1 v_i^{(\nu)} + w_2^{\top(\pi)} v_i^{(\nu-1)} = \lambda_1 w_2^{\top(\pi)} v_i^{(\nu)} \\
 \Rightarrow (\lambda_2 - \lambda_1) w_2^{\top(\pi)} v_i^{(\nu)} &= 0 \\
 \Rightarrow w_2^{\top(\pi)} v_i^{(\nu)} &= 0 \text{ se } \lambda_2 \neq \lambda_1
 \end{aligned}$$

Dunque se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  sono autovalori distinti di  $F$ , ogni autovettore generalizzato destro di  $F$  relativo all'autovalore  $\lambda_1$  è ortogonale a ogni autovettore generalizzato sinistro relativo all'autovalore  $\lambda_2 \neq \lambda_1$ .

## 2.2 Il Teorema di Perron-Frobenius

**Teorema 2.2.1.** [Matrici strettamente positive: il teorema di Perron]

Se la matrice di stato  $F \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$  del sistema positivo a tempo discreto  $\Sigma_+ = (F, G, H)$  è strettamente positiva ( $F \gg 0$ ), allora essa ammette un autovalore reale positivo, di molteplicità algebrica unitaria, strettamente dominante (ovvero maggiore in modulo di tutti gli altri autovalori di  $F$ ). Tale autovalore è definito di *Frobenius* e viene indicato con  $\lambda_F$ .

Inoltre esiste un autovettore strettamente positivo relativo a  $\lambda_F$ , indicato con  $v_F \gg 0$  e chiamato autovettore di *Frobenius* associato a  $\lambda_F$ . Non esistono altri autovettori positivi di  $F$ , ad eccezione fatta per i multipli (positivi) di  $v_F$ .

*Dimostrazione.* Consideriamo le disuguaglianze del tipo  $\mathcal{F}_\lambda = \{Fv \geq \lambda v, \exists v > 0\}$ , al variare di  $\lambda$  in  $\mathbb{R}$ . Sia  $\Lambda_F$  l'insieme dei numeri reali  $\lambda$  in corrispondenza ai quali esiste un vettore  $v > 0$  tale che  $Fv \geq \lambda v$ , cioè:

$$\Lambda_F = \{ \lambda \in \mathbb{R} : Fv \geq \lambda v, \exists v > 0 \}$$

Si dimostra <sup>1</sup> che l'insieme  $\Lambda_F$  è non vuoto, chiuso e limitato superiormente, pertanto ammette *massimo*, che indichiamo con  $\lambda_F$ :

$$\lambda_F \doteq \max \Lambda_F = \max \{ \lambda : Fv \geq \lambda v, \exists v > 0 \}. \quad (2.1)$$

Chiaramente  $\lambda_F \geq 0$ , per quanto detto prima. Proveremo ora che il vincolo  $Fv \geq \lambda v$  per  $\lambda = \lambda_F$  è soddisfatto come uguaglianza.

Sia  $v_F > 0$  un vettore che soddisfa  $Fv_F \geq \lambda_F v_F$  e supponiamo che ci sia almeno una componente del vettore di sinistra maggiore della corrispondente componente nel vettore di destra, ovvero  $Fv_F > \lambda_F v_F$  e quindi  $Fv_F - \lambda_F v_F > 0$ . Poiché  $F \gg 0$  si ha che  $F(Fv_F - \lambda_F v_F) \gg 0$ .

Ponendo  $y_0 = Fv_F$  si otterrebbe la disuguaglianza  $Fy_0 \gg \lambda_F y_0$ : ciò significa che il valore di  $\lambda_F$  potrebbe essere ulteriormente incrementato senza violare il

<sup>1</sup>Per la dimostrazione si veda l'**Appendice**.

vincolo precedente. Ciò entra in conflitto con la definizione (2.1), allora possiamo concludere che:

$$Fv_F = \lambda_F v_F \quad (2.2)$$

Questo implica che  $\lambda_F$  è autovalore di  $F$ .

Proviamo ora che esso è strettamente dominante, cioè per ogni autovalore  $\lambda \neq \lambda_F$ , si ha che  $\lambda_F > |\lambda|$ .

Sia  $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$  autovettore associato a  $\lambda \neq \lambda_F$ , cioè  $Fy = \lambda y$ , e indichiamo con  $|y| = \begin{bmatrix} |y_1| \\ \vdots \\ |y_n| \end{bmatrix}$  il vettore le cui componenti sono il valore assoluto delle componenti del vettore  $y$ . Valgono le seguenti disuguaglianze:

$$F|y| = \begin{bmatrix} f_{11}|y_1| + f_{12}|y_2| + \dots + f_{1n}|y_n| \\ \vdots \\ f_{i1}|y_1| + f_{i2}|y_2| + \dots + f_{in}|y_n| \\ \vdots \\ f_{n1}|y_1| + f_{n2}|y_2| + \dots + f_{nn}|y_n| \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} |f_{11}y_1 + f_{12}y_2 + \dots + f_{1n}y_n| \\ \vdots \\ |f_{i1}y_1 + f_{i2}y_2 + \dots + f_{in}y_n| \\ \vdots \\ |f_{n1}y_1 + f_{n2}y_2 + \dots + f_{nn}y_n| \end{bmatrix} = |Fy|$$

Allora si ha che  $F|y| \geq |Fy| = |\lambda| |y|$ , quindi  $|\lambda| \in \Lambda_F$  e dalla definizione (2.1) segue immediatamente che  $\lambda_F \geq |\lambda|$ .

Vediamo ora che la disuguaglianza vale in senso stretto. A tal fine consideriamo la matrice  $F_\delta \doteq F - \delta I$ , dove la quantità  $\delta > 0$  è scelta in modo arbitrario purché valga la condizione  $F_\delta \gg 0$ .

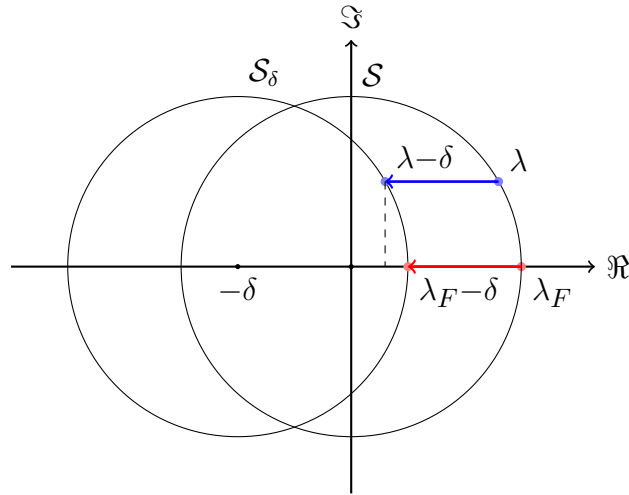
Dato che  $(\lambda - \delta)I - F_\delta = \lambda I - F$ , notiamo che lo spettro di  $F_\delta$  risulta traslato a sinistra di una quantità  $\delta > 0$  rispetto allo spettro di  $F$ , infatti i polinomi caratteristici sono legati dalla relazione:

$$\Delta_F(z) = \det(zI - F) = \det((z - \delta)I - F_\delta) = \Delta_{F_\delta}(z - \delta)$$

Dunque se  $\lambda, \lambda_F \in \sigma(F) \Rightarrow \lambda - \delta, \lambda_F - \delta \in \sigma(F_\delta)$ , inoltre poiché  $F_\delta \gg 0$  dalle precedenti osservazioni segue che  $\lambda_F - \delta$  è il più grande autovalore reale di  $F_\delta$  e quindi si ha che  $\lambda_F - \delta \geq |\lambda - \delta|$ .

D'altra parte se fosse  $\lambda_F = |\lambda|$ , certamente  $\Re(\lambda) < \Re(\lambda_F)$  (si veda la Figura 2.1), e prendendo i valori assoluti si otterrebbe  $|\lambda_F - \delta| < |\lambda - \delta|$ , che è assurdo.

Figura 2.1: In figura sono riportati gli insiemi  $\mathcal{S} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = \lambda_F\}$  e  $\mathcal{S}_\delta = \{z \in \mathbb{C} : |z + \delta| = \lambda_F\}$



Abbiamo allora provato che  $\lambda_F$  è autovalore reale positivo strettamente dominante della matrice  $F$ , ovvero è l'autovalore di *Frobenius*. Inoltre dall'equazione (2.2), in virtù del fatto che  $Fv_F \gg 0$ , segue  $\lambda_F v_F \gg 0$  e quindi  $v_F \gg 0$ , cioè  $v_F$  è autovettore strettamente positivo associato a  $\lambda_F$ , come pure  $\lambda_F > 0$ .

Vogliamo provare che  $v_F$  è l'unico autovettore relativo a  $\lambda_F$ . Supponiamo che ciò non sia vero, cioè che ne esista un altro, che indichiamo  $y$ , linearmente indipendente da  $v_F$ .

Allora potremo trovare una combinazione lineare  $w = \alpha v_F + y$ , con  $\alpha \in \mathbb{R}$ , tale che  $w$  sia un vettore positivo ma non strettamente positivo.

Infatti è sufficiente scegliere  $\alpha = \max_i \left\{ -\frac{y_i}{v_{Fi}} \right\}$ , dove il pedice  $i$  indica l' $i$ -esima componente del vettore considerato: in questo modo per ciascuna componente vale  $w_i = \alpha v_{Fi} + y_i \geq 0$  e almeno una componente è nulla, cioè  $\exists j : w_j = \alpha v_{Fj} + y_j = 0$

D'altra parte il vettore  $w > 0$ , in quanto autovettore relativo all'autovalore  $\lambda_F$ , soddisfa all'equazione  $Fw = \lambda_F w$ , e dunque deve essere necessariamente strettamente positivo (in quanto  $F \gg 0$ ) ed entriamo quindi in contraddizione. Si noti che in modo del tutto analogo possiamo provare che non esistono autovettori positivi relativi ad autovalori diversi da  $\lambda_F$ .

Ora che abbiamo dimostrato che la molteplicità geometrica di  $\lambda_F$  è unitaria, rimane da provare che la molteplicità algebrica dell'autovalore  $\lambda_F$  è unitaria. Se così non fosse esisterebbe una *catena di Jordan* relativa all'autovalore  $\lambda_F$  di lunghezza  $m \geq 2$  (nel seguito supporremo  $m = 2$  per semplicità), e quindi un insieme di vettori  $\mathcal{C}_{\lambda_F} = \{v^{(1)}, v^{(2)}\}$  che soddisfano:

$$\begin{aligned} (F - \lambda_F I) v^{(1)} &= 0 \\ (F - \lambda_F I) v^{(2)} &= v^{(1)} \end{aligned}$$

Poiché  $v^{(1)}$  è autovettore di  $F$  relativo a  $\lambda_F$ , esso è multiplo di  $v_F$ , e possiamo assumere senza perdita di generalità che  $v^{(1)} = v_F$ , da cui:

$$(F - \lambda_F I) v^{(2)} = v_F \tag{2.3}$$

Consideriamo ora l'autovettore  $w_F \gg 0$  relativo all'autovalore  $\lambda_F$  dalla matrice strettamente positiva  $F^\top \gg 0$ . Questo implica che  $w_F^\top$  è autovettore *sinistro* relativo all'autovalore  $\lambda_F$  della matrice  $F$ . Premoltiplicando la (2.3) perveniamo all'assurdo:

$$0 = w_F^\top (F - \lambda_F I) v^{(2)} = w_F^\top v_F \gg 0$$

Concludiamo che  $\lambda_F$  è radice semplice del polinomio caratteristico di  $F$ .

Per concludere, dimostriamo che la matrice  $F$  non ammette altri autovettori positivi all'infuori dei multipli scalari di  $v_F$ . Supponiamo per assurdo che esista un vettore  $v > 0$  tale che  $Fv = \lambda v$ , con  $\lambda \neq \lambda_F$ , in base a quanto dimostrato

prima. Se così fosse, sulla base di quanto detto in precedenza, i due autovettori  $v$  e  $w_F$  dovrebbero essere ortogonali, ovvero dovrebbe valere

$$w_F^\top v = 0,$$

ma essendo  $w_F \gg 0$  e  $v > 0$  questo è impossibile.  $\square$

L'enunciato del Teorema di Perron si estende senza modifica alle matrici primitive: infatti la potenza di una matrice primitiva corrispondente all'indice di primitività è una matrice strettamente positiva (Teorema 1.5.1).

In un sistema lineare positivo a tempo discreto, descritto da una matrice  $F$  *strettamente positiva* o *primitiva*, la dinamica libera del vettore di stato, a partire da una generica condizione iniziale  $x(0) > 0$ , ha l'autovettore di *Frobenius*  $v_F \gg 0$  come autovettore dominante, con ciò intendendo che la traiettoria di stato tende asintoticamente ad allinearsi con  $v_F$ . Se infatti indichiamo con  $\alpha > 0$  la proiezione del vettore di stato su  $v_F$ , dato che esiste un unico autovalore dominante  $\lambda_F > 0$  di molteplicità algebrica unitaria, l'evoluzione libera è approssimabile asintoticamente tramite la successione:

$$\alpha v_F, \alpha \lambda_F v_F, \alpha \lambda_F^2 v_F, \alpha \lambda_F^3 v_F, \dots$$

Qualora venga specificata la struttura del sistema  $\Sigma_+$ , cioè se esso è riducibile o irriducibile, e in quest'ultimo caso se è ciclico o primitivo, possiamo caratterizzare ulteriormente lo spettro della matrice  $F$  ed in particolare gli autovalori e autovettori dominanti. Per la dimostrazione del seguente teorema si veda Fornasini [3].

---

**Teorema 2.2.2.** [Matrici irriducibili: il teorema di Perron-Frobenius]

Se la matrice di stato  $F \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$  del sistema a tempo discreto  $\Sigma_+ = (F, G, H)$  è irriducibile, allora l'autovettore di *Frobenius* è unico e strettamente positivo

( $v_F \gg 0$ ), esso è relativo ad un autovalore dominante reale positivo  $\lambda_F$ , di molteplicità algebrica unitaria, e ogni altro autovalore avente modulo pari al raggio spettrale, cioè  $\lambda \in \sigma(F) : |\lambda| = \lambda_F$ , è radice semplice del polinomio caratteristico.

Se il sistema  $\Sigma_+$  è ciclico con indice di ciclicità pari a  $r$ , allora gli autovalori di modulo  $\lambda_F$  sono tutti e soli i numeri complessi dati da:

$$\lambda_i = \lambda_F e^{j\frac{2\pi i}{r}} \quad i = 1, \dots, r-1$$

In particolare, se il sistema è primitivo ( $r = 1$ ),  $\lambda_F$  è unico.

---

Consideriamo un sistema riducibile a tempo discreto  $x(t+1)=Fx(t)$ . Tramite un'opportuna permutazione delle variabili di stato è possibile portare il sistema in forma canonica riducibile (1.4.2). Osserviamo che lo spettro di  $F$  è l'unione degli spettri delle sottomatrici sui blocchi diagonali  $F_{ii}$  che sono matrici *irriducibili* e pertanto:

$$\sigma(F) = \sigma(F_{11}) \cup \sigma(F_{22}) \cup \dots \cup \sigma(F_{kk})$$

In base al Teorema 2.2.2, ciascuna matrice diagonale  $F_{ii}$  è caratterizzata da un suo autovalore di Frobenius  $\lambda_{F_i}$ ,  $i = 1, \dots, k$ , e pertanto l'autovalore di Frobenius di  $F$  è:

$$\lambda_F = \max_i \lambda_{F_i}$$

Per i sistemi positivi è semplice ottenere gli estremi dell'autovalore di Frobenius, utilizzando il seguente teorema. Per la dimostrazione si veda Luenberger [5]

---

**Teorema 2.2.3.** [Estremi superiore e inferiore dell'autovalore di Frobenius]

Consideriamo la matrice di stato  $F \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$  del sistema  $\Sigma_+ = (F, G, H)$ : indichiamo con  $r_i$  e  $c_i$  le somme degli elementi rispettivamente della  $i$ -esima colonna e della  $i$ -esima riga. L'autovalore dominante verifica la disuguaglianza:

$$\max \left\{ \min_i r_i, \min_i c_i \right\} \leq \lambda_F \leq \min \left\{ \max_i r_i, \max_i c_i \right\}$$


---

Questo Teorema suggerisce un semplice procedimento per il calcolo dell'autovalore dominante: calcolati i coefficienti del polinomio caratteristico della matrice di stato  $\Delta_F(z)$ , si può determinare l'andamento della funzione  $\Delta_F(\lambda)$  nell'intervallo stabilito dal Teorema 2.2.3: lo zero più elevato sarà proprio  $\lambda_F$ .



# Capitolo 3

## Raggiungibilità

### 3.1 Coni di $\mathbb{R}^n$

Il vincolo che i segnali di ingresso assumano valori non negativi modifica sostanzialmente la geometria degli insiemi raggiungibili e la teoria del controllo, cioè la possibilità di portare il sistema da uno stato ad un altro.

Strumento essenziale per affrontare questo argomento è la teoria dei coni, della quale in questa sezione esamineremo i concetti principali.

---

#### **Definizione 3.1.1.** [Cono di $\mathbb{R}^n$ ]

Un sottoinsieme  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$  è un cono se:

$$x \in \mathcal{C} \Rightarrow \alpha x \in \mathcal{C} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}_+.$$

- [Cono Positivo] Se  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}_+^n$  il cono si dice *positivo*.
- [Cono Convesso] Se  $\mathcal{C}$  è chiuso rispetto alle combinazioni lineari convesse dei suoi punti ( $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{C}$ ,  $z \doteq \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2$  con  $0 \leq \alpha \leq 1$ , si ha  $z \in \mathcal{C}$ ), allora il cono si dice *convesso*.
- [Cono Solido] Se  $\mathcal{C}$  contiene un aperto di  $\mathbb{R}^n$  allora il cono si dice *solido*.
- [Cono con Vertice] Se  $x \in \mathcal{C}$  e  $-x \in \mathcal{C} \Rightarrow x = 0$  allora il cono ha un *vertice*.
- [Cono Chiuso] Se  $\mathcal{C}$  contiene tutti i suoi punti di frontiera è *chiuso*.

Un *cono proprio* è chiuso, solido, convesso, con vertice.

**Esempio 3.1.** Nello spazio Euclideo  $\mathbb{R}^3$ :

- L'insieme  $\mathcal{C}_1 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\} \doteq \mathbb{R}_+^3$  è un cono positivo e proprio, detto *ortante positivo* di  $\mathbb{R}^3$ .
- L'insieme  $\mathcal{C}_2 = \{(x_1, x_2, x_3) : (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}} \leq x_3\}$  è un cono proprio, detto “cono gelato”.
- L'insieme  $\mathcal{C}_3 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 \geq x_2\}$  è un cono senza vertice (contiene l'intero asse  $x_3$ ), convesso, solido e chiuso.
- Ogni sottospazio vettoriale  $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^n$  è un cono.

L'insieme  $\mathcal{W} = \{w_i, i \in I\} \subseteq \mathbb{R}^n$  è un *insieme di generatori* per il cono  $\mathcal{C}$  se i punti di  $\mathcal{C}$  sono tutte e sole le combinazioni lineari finite a coefficienti non negativi degli elementi di  $\mathcal{W}$ , cioè:

$$x \in \mathcal{C} \Leftrightarrow x = \sum_{i \in I} \lambda_i w_i, \lambda_i \geq 0$$

Notiamo che tutti i coni convessi ammettono un insieme di generatori (basta prendere  $\mathcal{W} = \mathcal{C}$ ) e denotiamo con  $\text{cono}(\mathcal{W})$  il cono convesso che ammette  $\mathcal{W}$  come insieme di generatori:

$$\text{cono}(\mathcal{W}) = \left\{ \sum_{i \in I} \lambda_i w_i : w_i \in \mathcal{W}, \lambda_i \geq 0 \right\} \quad (3.1)$$

Di particolare interesse sono i coni che ammettono una famiglia *finita* di generatori e vengono definiti *coni poliedrici* o *coni finitamente generati*: se  $\mathcal{W}$  contiene un numero finito  $k$  di elementi,  $w_1, \dots, w_k$ , allora l'insieme (3.1) si riduce a:

$$\text{cono}(\mathcal{W}) = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i w_i, \lambda_i \geq 0 \right\}.$$

Equivalentemente, introdotta la matrice  $W = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_k] \in \mathbb{R}^{n \times k}$ , cioè la matrice le cui colonne sono i generatori, si ha che:

$$\text{cono}(\mathcal{W}) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = W\Lambda, \Lambda \in \mathbb{R}_+^k \right\}$$

Il seguente Teorema, di cui verrà riportato solo l'enunciato, mostra come ogni elemento di un cono poliedrico possa essere espresso come combinazione lineare positiva di un sottoinsieme di elementi di  $\mathcal{W}$  linearmente indipendenti, e quindi al più  $n$ . Gli  $n$  elementi di  $\mathcal{W}$  dipendono in generale da  $x$ .

---

**Teorema 3.1.1.** [Teorema di Carathéodory]

Sia  $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^n$  e sia  $x \in \text{cono}(\mathcal{W})$ . Esiste allora un sottoinsieme di vettori linearmente indipendenti  $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{W}$  tale che  $x \in \text{cono}(\mathcal{T})$ .

---

## 3.2 Coni di Raggiungibilità nei sistemi discreti positivi

In questa sezione verrà data la definizione di sistema raggiungibile e vedremo qual'è la geometria dell'insieme degli stati raggiungibili per i sistemi a tempo discreto.

---

**Definizione 3.2.1.** [Raggiungibilità]

Un sistema positivo a tempo discreto  $\Sigma_+ = (F, G, H)$  è *raggiungibile* (da zero) se per ogni stato  $x_F > 0$  esiste un intero  $k < \infty$  ed una sequenza di controllo  $\{u(i), i = 1, \dots, k-1\}$ , con  $u(i) \geq 0 \forall i$ , che porta lo stato del sistema da  $x(0) = 0$  a  $x(k) = x_F$ .

**Definizione 3.2.2.** [Raggiungibilità in senso debole]

Un sistema positivo a tempo discreto  $\Sigma_+ = (F, G, H)$  è *raggiungibile in senso debole* (da zero) se per ogni stato  $x_F \gg 0$  esiste un intero  $k < \infty$  ed una sequenza di controllo  $\{u(i), i = 1, \dots, k-1\}$ , con  $u(i) \geq 0 \forall i$ , che porta lo stato del sistema da  $x(0) = 0$  a  $x(k) = x_F$ .

---

Notiamo che la Definizione 3.2.2 restringe l'insieme degli stati raggiungibili in un intervallo temporale finito a quelli dell'ortante positivo privato degli assi: gli

stati sulla frontiera di tale insieme possono essere raggiunti tramite una sequenza di ingresso  $\{u(i), i = 1, \dots, k-1\}$  *finita* ( $k < \infty$ ) o *infinita* ( $k \rightarrow \infty$ ).

A partire dalla Definizione 3.2.1 possiamo caratterizzare gli stati raggiungibili in  $k$  passi: dato che  $x(0) = 0$  ci troviamo in pura *evoluzione forzata* e dunque l'espressione dello stato all'istante  $k$  è la seguente:

$$x(k) = \sum_{i=0}^{k-1} F^{k-1-i} G u(i) \quad , \text{ con } u(i) \geq 0 \quad \forall i.$$

Equivalentemente, possiamo ricavare un'espressione matriciale introducendo la matrice di *raggiungibilità in  $k$  passi* della coppia  $(F, G) \geq 0$ , cioè la matrice non negativa  $\mathcal{R}_k \doteq [G \mid FG \mid \dots \mid F^{k-1}G] \in \mathbb{R}_+^{n \times km}$  e il vettore non negativo di ingresso  $u_{[0,k)} \doteq [u^\top(k-1) \mid u^\top(k-2) \mid \dots \mid u^\top(0)]^\top \in \mathbb{R}_+^{km}$ :

$$x(k) = \mathcal{R}_k u_{[0,k)} \in \mathbb{R}_+^n.$$

L'insieme degli stati raggiungibili in  $k$  passi, che indicheremo con  $\mathcal{C}_k^R$ , si ottiene facendo variare il vettore di ingresso  $u_{[0,k)}$  in  $\mathbb{R}_+^{km}$ ; è, in altri termini, l'insieme delle combinazioni lineari delle colonne della matrice di raggiungibilità in  $k$  passi secondo coefficienti non negativi:

$$\mathcal{C}_k^R \doteq \left\{ x_F \in \mathbb{R}_+^n : x(k) = \mathcal{R}_k u_{[0,k)} : \exists u_{[0,k)} \in \mathbb{R}_+^{km} \right\}$$

Da ciò segue che questo insieme è un *cono positivo* e *poliedrico*, generato dalle colonne di  $\mathcal{R}_k$ , cioè  $\mathcal{C}_k^R = \text{cono}(\mathcal{R}_k)$ . Abbiamo così provato la seguente proposizione:

---

**Proposizione 3.2.1.** [Insieme degli stati raggiungibili in  $k$  passi di un sistema positivo a tempo discreto]

In un sistema positivo a tempo discreto  $\Sigma_+ = (F, G, H)$  l'insieme degli stati raggiungibili in  $k$  passi,  $\mathcal{C}_k^R$ , è un cono positivo, convesso, chiuso e poliedrico, definito *cono di raggiungibilità in  $k$  passi*.

---

### 3.3 Catene di coni

Il comportamento dei coni di raggiungibilità al crescere di  $k$  è per certi aspetti analogo a quello dei sottospazi di raggiungibilità dei sistemi lineari senza vincoli di segno sull'ingresso. Valgono infatti le seguenti proprietà:

---

**Proposizione 3.3.1.** [Catene di coni di raggiungibilità]

In un sistema positivo a tempo discreto  $\Sigma_+ = (F, G, H)$  i coni di raggiungibilità soddisfano alle seguenti proprietà:

- [catena monotona crescente] Al crescere di  $k \in \mathbb{Z}_+$  i coni di raggiungibilità verificano le inclusioni (che possono essere strette  $\forall k$ ):

$$\mathcal{C}_1^R \subseteq \mathcal{C}_2^R \subseteq \dots \subseteq \mathcal{C}_k^R \subseteq \mathcal{C}_{k+1}^R \subseteq \dots \quad (3.2)$$

- [stazionarietà] Se per qualche  $k \in \mathbb{Z}_+$  si ha  $\mathcal{C}_k^R = \mathcal{C}_{k+1}^R$ , allora  $\mathcal{C}_{k+1}^R = \mathcal{C}_{k+2}^R$ ; cioè se la catena al passo  $k$  è stazionaria, essa lo è indefinitamente dal passo  $k$  in avanti.
- Se  $x \in \mathcal{C}_k^R$  allora, fra i vettori che realizzano il controllo  $\{u(i), i = 1, \dots, k-1\}$  con  $u(i) \geq 0 \forall i$ , almeno uno ha non più di  $n$  componenti positive.

---

*Dimostrazione.* Proviamo solo il terzo punto, dato che i primi due sono ovvi.

Dal Teorema di Carathéodory 3.1.1, se  $x \in \text{cono}(\mathcal{R}_k)$ , allora è esprimibile come combinazione lineare a coefficienti positivi delle colonne linearmente indipendenti di  $\mathcal{R}_k$ , che sono al più  $n$ . Perciò possiamo concludere che le componenti positive dei vettori di ingresso, che costituiscono i coefficienti combinatori, sono al più  $n$ .  $\square$

La questione più delicata per quanto riguarda i coni di raggiungibilità è il *tempo* necessario per raggiungere gli stati dell'ortante positivo: può infatti accadere, come precedentemente evidenziato, che la successione (3.2) sia monotona crescente in senso stretto, cioè:

$$\mathcal{C}_k^R \subsetneq \mathcal{C}_{k+1}^R \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+.$$

Questo accade perché non abbiamo più a che fare con sottospazi vettoriali, come nel caso di sistemi lineari senza vincoli di segno, dove l'insieme degli stati raggiungibili in un numero finito di passi  $k \geq n$  coincideva con il sottospazio di raggiungibilità in  $n$  passi, come diretta conseguenza del teorema di Cayley-Hamilton.

Possiamo concludere che l'insieme  $\mathcal{C}^R$  degli stati che possono essere raggiunti dall'origine applicando un ingresso non negativo di durata finita coincide con l'unione dei coni di raggiungibilità al variare di  $k$ :

$$\mathcal{C}^R \doteq \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{C}_k^R$$

ed è anch'esso un cono convesso, detto *cono di raggiungibilità*. A differenza dei coni  $\mathcal{C}_k^R$ , il cono di raggiungibilità  $\mathcal{C}^R$ :

- Può non essere *poliedrico*, cioè richiede infiniti generatori.
- Può non essere *chiuso*. In tal caso i punti di frontiera (cioè la chiusura del cono di raggiungibilità  $\overline{\mathcal{C}^R}$ ) sono *raggiungibili in senso debole*, nel senso che possiamo determinare una successione di stati  $x_i \in \mathcal{C}^R$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , tale che  $x_i \rightarrow \bar{x}$ ,  $\forall \bar{x} \in \overline{\mathcal{C}^R}$ , cioè possiamo giungere a stati arbitrariamente prossimi a  $\bar{x}$  tramite degli ingressi non negativi, senza mai arrivare a  $\bar{x}$ .

Perveniamo quindi alla seguente caratterizzazione della *raggiungibilità* per i sistemi positivi a tempo discreto:

---

**Proposizione 3.3.2.** [Sistema positivo raggiungibile e raggiungibile in senso debole]

Un sistema positivo a tempo discreto  $\Sigma_+ = (F, G, H)$  (o equivalentemente la coppia  $(F, G)$ ) è *(completamente) raggiungibile* se il cono di raggiungibilità coincide con l'intero ortante positivo di  $\mathbb{R}^n$ :

$$\mathcal{C}^R \equiv \mathbb{R}_+^n.$$

In tal caso tutti gli stati  $x \geq 0$  sono raggiungibili dall'origine applicando una sequenza di ingresso  $\{u(i), i = 1, \dots, k\}$ , con  $u(i) \geq 0 \forall i$ , di durata *finita*.

Un sistema è invece *raggiungibile il senso debole* se la chiusura del cono di raggiungibilità coincide con l'intero ortante positivo di  $\mathbb{R}^n$ :

$$\overline{\mathcal{C}^R} \equiv \mathbb{R}_+^n.$$

In tal caso tutti gli stati  $x \gg 0$  sono raggiungibili in tempo finito ma alcuni stati  $x > 0$  non lo sono.

---

Vogliamo ora esaminare la relazione che sussiste tra la *raggiungibilità* del sistema  $\Sigma$  non vincolato in segno e la proprietà di *solidità* dei coni di raggiungibilità del sistema positivo  $\Sigma_+$ .

È chiaro che l'insieme  $\mathcal{C}_k^R$  degli stati raggiungibili dall'origine in  $k$  passi, qualora vengano applicati ingressi non negativi, è un sottoinsieme (talora non proprio) di  $\mathcal{X}_k^R$  degli stati raggiungibili in  $k$  passi senza porre vincoli di segno sull'ingresso.

Quindi se  $\mathcal{C}_k^R$  contiene qualche aperto di  $\mathbb{R}_+^n$  possiamo concludere che anche  $\mathcal{X}_k^R$  lo contiene, e dunque il sistema  $\Sigma$  (senza vincoli di segno) risulta *raggiungibile*.

Vale inoltre il viceversa: la raggiungibilità del sistema  $\Sigma$  implica che si possa raggiungere un aperto di  $\mathbb{R}_+^n$  anche applicando ingressi non negativi.

---

**Proposizione 3.3.3.** [Condizioni per la solidità di  $\mathcal{C}_k^R$ ]

Il cono di raggiungibilità  $\mathcal{C}_k^R$  del sistema positivo a tempo discreto  $\Sigma_+ = (F, G, H)$  è *solido* se e solo se la matrice di raggiungibilità  $\mathcal{R}_k$  ha rango  $n$ . Di conseguenza il sistema  $\Sigma$  è completamente raggiungibile se e solo se è solido il cono di raggiungibilità  $\mathcal{C}_n^R$  al passo  $n$ , e in tal caso ogni cono  $\mathcal{C}_k^R$ , con  $k \geq n$ .

---

La proprietà di solidità che abbiamo esaminato non implica tuttavia né la stazionarietà della successione (3.2) né la raggiungibilità positiva: se in  $k$  passi

sono raggiungibili tutti i punti di un aperto di  $\mathbb{R}_+^n$  non è detto che  $\mathcal{C}_k^R \equiv \mathcal{C}_{k+1}^R$  o che  $\mathcal{C}_k^R \equiv \mathbb{R}_+^n$ .

Vediamo ora due esempi che chiariscono quanto sopra affermato.

### Esempio 3.2.

Consideriamo il sistema a tempo discreto ad un solo ingresso:

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \beta \\ \alpha & 1-\beta \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} \gamma \\ 1-\gamma \end{bmatrix} u(t) = F x(t) + g u(t),$$

con  $0 < \alpha, \beta, \gamma < 1$ .

La matrice di stato  $F$  è strettamente positiva e ha come autovalore di Frobenius  $\lambda_F = 1$ , in quanto righe e colonne hanno tutte somma unitaria (si veda il Teorema 2.2.3). L'autovettore di Frobenius si ottiene trovando l'unico autovettore positivo nel sottospazio vettoriale:

$$\ker(F - \lambda_F I_2) = \{ v \in \mathbb{R}^n : Fv = \lambda_F v \}.$$

Scegliendo  $v_F$  in modo che la somma delle componenti sia unitaria si ottiene:

$$v_F = \begin{bmatrix} \frac{\beta}{\alpha+\beta} \\ \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \end{bmatrix} \gg 0.$$

L'altro autovalore della matrice  $F$  è  $\lambda = 1 - \alpha - \beta$  e l'autovettore corrispondente è proporzionale a  $v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ .

Studiamo ora la raggiungibilità del sistema (con ingressi di segno arbitrario): la matrice di raggiungibilità

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} g & Fg \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & (1-\alpha)\gamma + \beta(1-\gamma) \\ 1-\gamma & \alpha\gamma + (1-\beta)(1-\gamma) \end{bmatrix}$$



ha rango pieno se e solo se  $g > 0$  non è autovettore della matrice  $F$ , e dato che l'unico autovettore positivo di una matrice strettamente positiva è proprio quello di Frobenius il sistema non sarà raggiungibile se e solo se:

$$g = \begin{bmatrix} \gamma \\ 1 - \gamma \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \frac{\beta}{\alpha + \beta} \\ \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Questo risultato è intuitivo: partendo da uno stato che sia autovettore di  $F$ , in assenza di ingresso il vettore di stato rimarrà allineato all'autovettore  $v_F$  indefinitamente, pregiudicando così la possibilità di raggiungere qualsiasi altro stato in  $\mathbb{R}^2$ .

Va sottolineato che la raggiungibilità finora analizzata prevede che si possano usare campioni di ingresso non vincolati in segno, cioè anche negativi.

Se supponiamo invece che  $u(k) \geq 0$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+$  ciò comporta che gli insiemi di raggiungibilità sono coni convessi  $\mathcal{C}_k^R$ , la struttura dei quali vogliamo analizzare. Si tratta quindi di studiare la struttura dei generatori  $g, Fg, \dots, F^k g, \dots$  al variare di  $k \in \mathbb{Z}_+$ .

Distinguiamo allora due casi:

1. Se  $g$  è parallelo all'autovalore di Frobenius, cioè vale la (3.3), il cono di raggiungibilità  $\mathcal{C}_k^R$  è stazionario  $\forall k \geq 1$  e coincide con la semiretta uscente dall'origine e parallela a  $g$ .
2. Se  $g$  non è parallelo all'autovalore di Frobenius, conviene calcolarne le proiezioni sugli autovettori associati agli autovalori di  $F$ , cioè le sue coordinate rispetto alla base di Jordan  $\begin{bmatrix} v_F & v \end{bmatrix}$ :

$$g = \begin{bmatrix} \gamma \\ 1 - \gamma \end{bmatrix} = \gamma_0 v_F + \gamma_1 v = \gamma_0 \begin{bmatrix} \frac{\beta}{\alpha + \beta} \\ \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \end{bmatrix} + \gamma_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Si ottiene  $\gamma_0 = 1$  e  $\gamma_1 = \gamma - \frac{\beta}{\alpha + \beta}$ . L'espressione del  $k+1$ -esimo generatore

del cono di raggiungibilità è del tipo:

$$F^k g = \begin{bmatrix} \frac{\beta}{\alpha+\beta} \\ \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \end{bmatrix} + \left( \gamma - \frac{\beta}{\alpha+\beta} \right) \lambda_1^k \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

E dunque i generatori tendono ad allinearsi, per  $k \rightarrow +\infty$ , con l'autovettore di Frobenius e possiamo concludere che il cono di raggiungibilità  $\mathcal{C}_k^R$  non riesce a “coprire” l'ortante positivo  $\mathbb{R}_+^n$ , nonostante esso sia solido, cioè *non* è vero che  $\mathcal{C}_k^R \equiv \mathbb{R}_+^n$ .

**Esempio 3.3.** Consideriamo il sistema a tempo discreto ad un solo ingresso:

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 1-\beta & 0 \\ \beta & 1-\alpha \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) = F x(t) + g u(t)$$

$$\text{con } 0 < \alpha < \beta < 1.$$

La matrice  $F$  è riducibile, l'autovalore dominante è  $\lambda_1 = 1 - \alpha$  e ha come autovettore  $v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ . L'altro autovalore è  $\lambda_2 = 1 - \beta$ , cui corrisponde l'autovettore  $v_2 = \begin{bmatrix} \beta - \alpha \\ -\beta \end{bmatrix}$ . Possiamo dunque calcolare le proiezioni del vettore di ingresso  $g$  sui due autovettori della matrice  $F$ :

$$g = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 = \gamma_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \gamma_2 \begin{bmatrix} \beta - \alpha \\ -\beta \end{bmatrix}$$

da cui si ricava  $\gamma_1 = \frac{\beta}{\beta-\alpha} > 0$  e  $\gamma_2 = \frac{1}{\beta-\alpha}$ . L'espressione del  $k+1$ -esimo generatore del cono di raggiungibilità è del tipo:

$$F^k g = \left( \frac{\beta}{\beta-\alpha} \right) \lambda_1^k \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \left( \frac{1}{\beta-\alpha} \right) \lambda_2^k \begin{bmatrix} \beta - \alpha \\ -\beta \end{bmatrix}$$

Dato che  $g$  ha una componente positiva su  $v_1$ , il vettore di stato si allinea asintoticamente per  $k \rightarrow +\infty$  a  $v_1$ .

Il cono di raggiungibilità  $\mathcal{C}_k^R$  al passo  $k$  è la parte di piano compresa tra le due semirette di supporto ai vettori  $g$  e  $F^k g$ . Al crescere di  $k$  questi costituiscono una successione crescente in senso stretto e si verifica che:

$$\mathcal{C}^R \doteq \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{C}_k^R = \mathbb{R}_+^2 \setminus \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix} : x_2 > 0 \right\}$$

Pertanto possiamo concludere che il sistema non è raggiungibile, ma è raggiungibile in senso debole in quanto  $\overline{\mathcal{C}^R} \equiv \mathbb{R}_+^n$  ed è inoltre solido. Tuttavia la catena di coni di raggiungibilità non diventa mai stazionaria, cioè *non* è vero che  $\mathcal{C}_k^R \equiv \mathcal{C}_{k+1}^R, \exists k$ .

Esiste una condizione necessaria e sufficiente che ci permette di garantire la stazionarietà della successione (3.2), nel caso di sistemi positivi ad un solo ingresso  $\Sigma_+ = (F, g)$ .

---

**Proposizione 3.3.4.** [Sistemi ad un solo ingresso: condizioni per la stazionarietà di  $\mathcal{C}_k^R$  ]

Sia  $(F, g)$  un sistema positivo a tempo discreto raggiungibile senza vincoli di segno sull'ingresso, allora:

- Il cono  $\mathcal{C}_k^R$  è solido per  $k \geq n$ , ma non per  $k < n$ .
- La successione (3.2) è stazionaria al passo  $n$ , cioè  $\mathcal{C}_n^R \equiv \mathcal{C}_{n+1}^R$ , se e solo se i coefficienti del polinomio caratteristico:

$$\Delta_F(z) = \det(zI_n - F) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \dots + \alpha_{n-1} z^{n-1} + z^n$$

sono non positivi, cioè  $\alpha_i \leq 0 \forall i = 1, \dots, n-1$ .

---

*Dimostrazione.* Un sistema è raggiungibile con un solo ingresso (senza vincoli di segno) se e solo se lo è in  $n$  passi: la condizione sul rango non può essere soddisfatta per  $k < n$ . Pertanto per la Proposizione 3.3.3 il primo punto è dimostrato.

Se assumiamo che tutti i coefficienti del polinomio caratteristico della matrice  $F$  siano non positivi, cioè  $\alpha_i \leq 0 \forall i = 1, \dots, n-1$ , allora per il Teorema di Cayley-Hamilton ( $\Delta_F(F) = 0$ ) segue che:

$$F^n g = -\alpha_0 g - \alpha_1 Fg - \dots - \alpha_{n-1} F^{n-1} g \quad (3.4)$$

Il vettore  $F^n g$  è combinazione lineare dei vettori  $F^{n-1}g, \dots, Fg, g$ , secondo coefficienti combinatori non negativi. Poiché questi vettori generano il cono di raggiungibilità in  $n$  passi si ha che  $F^n g \in \mathcal{C}_n^R$ , dunque  $\mathcal{C}_n^R \equiv \mathcal{C}_{n+1}^R$ .

Proviamo ora il viceversa: se vale l'uguaglianza  $\mathcal{C}_n^R \equiv \mathcal{C}_{n+1}^R$ , allora  $F^n g \in \mathcal{C}_{n+1}^R \Rightarrow F^n g \in \mathcal{C}_n^R$ , cioè questo vettore è esprimibile come combinazione lineare positiva dei generatori del cono di raggiungibilità  $\mathcal{C}_n^R$  in  $n$  passi. Esistono cioè  $\beta_i \geq 0$  tali che:

$$F^n g = \beta_0 g + \beta_1 Fg + \dots + \beta_{n-1} F^{n-1} g \quad (3.5)$$

Confrontando l'espressione di  $F^n g$  nelle equazioni (3.4) e (3.5), per l'unicità della rappresentazione di un vettore rispetto ad una base fissata (in questo caso la famiglia di generatori  $F^{n-1}g, \dots, Fg, g$ ) possiamo concludere che i coefficienti del polinomio caratteristico sono non positivi.  $\square$

## 3.4 Completa raggiungibilità positiva

Nonostante non si possa ricorrere al teorema di Cayley-Hamilton per studiare la raggiungibilità di un sistema positivo a tempo discreto, la struttura della matrice  $\mathcal{R}_n$  di raggiungibilità in  $n$  passi del sistema fornisce delle condizioni necessarie e sufficienti per dedurre questa proprietà, che nel seguito esamineremo.

Verrà dimostrato come la raggiungibilità di un sistema positivo a tempo discreto sia una proprietà strutturale attribuibile indifferentemente alla coppia  $(F, G)$ , alla sua immagine booleana  $(F^\natural, G^\natural)$  o al sottografo  $\mathcal{D}(F, G)$ .

### 3.4.1 Condizioni di completa raggiungibilità positiva

Per i sistemi positivi a tempo discreto è stata individuata [Coxon-Shapiro 1987] la seguente condizione di completa raggiungibilità:

**Teorema 3.4.1.** [Condizioni di completa raggiungibilità positiva]

Il sistema positivo a tempo discreto  $\Sigma_+ = (F, G, H)$  è completamente raggiungibile se e solo se la matrice  $\mathcal{R}_n$  di raggiungibilità in  $n$  passi del sistema contiene una matrice  $n \times n$  *monomia*, cioè tra i vettori  $G, FG, F^2G, \dots, F^{n-1}G$  figurano le  $n$  colonne di una matrice monomia.

*Dimostrazione.* Verifichiamo innanzitutto che la condizione è sufficiente. Se  $\mathcal{R}_n$  contiene  $n$  vettori monomi linearmente indipendenti il cono di raggiungibilità in  $n$  passi può essere espresso come combinazione lineare positiva di questi  $n$  generatori:

$$\mathcal{C}_n^R = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^n : x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, \alpha_i \geq 0 \forall i = 1, \dots, n \right\} = \mathbb{R}_+^n.$$

Da ciò segue che  $\mathcal{C}^R \equiv \mathbb{R}_+^n$ , il che prova la completa raggiungibilità del sistema.

Verifichiamo ora che la condizione è necessaria e partiamo dall'ipotesi che il sistema sia completamente raggiungibile: in tal caso si ha che  $\mathcal{C}^R \equiv \mathbb{R}_+^n$ . Devono esistere allora  $n$  generatori che hanno come supporto i semiassi dello spazio di stato, che sono gli  $n$  vettori di raggiungibilità e che indicheremo con  $F^{k_1-1}g_{\nu_1}, F^{k_2-1}g_{\nu_2}, \dots, F^{k_n-1}g_{\nu_n}$ , con  $k_i \in \{1, \dots, n\}$  e  $\nu_i \in \{1, \dots, m\}$ .

Riordinando le variabili di stato in modo che  $F^{k_i-1}g_{\nu_i}$  sia disposto sull'asse  $x_i$ , ovvero  $F^{k_i-1}g_{\nu_i} = \alpha_i e_i$ , con  $\alpha_i \geq 0$ , possiamo concludere che la matrice di raggiungibilità  $\mathcal{R}_k$ , con  $k = \max \{k_1, \dots, k_n\}$  contiene tra le sue colonne quelle di una matrice monomia.

Rimane da verificare che l'intero  $k$ , chiamato *indice di raggiungibilità*, non eccede le dimensioni del sistema, ovvero  $k \leq n$ .

La dimostrazione di questo fatto è piuttosto delicata e fa ricorso alle proprietà strutturali legate al grafo di influenza associato alla coppia  $(F, G)$ : se la  $j$ -esima colonna della matrice  $F^{\mu-1}G$  è un vettore  $j$ -monomio, questo significa che esiste un *cammino deterministico* dal nodo  $g_j$  al nodo  $x_i$ , con ciò intendendo che, partendo da  $g_j$  in  $\mu$  passi può essere raggiunto unicamente il nodo  $x_i$ .

Si dimostra [Coxson-Larson- Schneider 1987] che se esiste un cammino deterministico da un qualche nodo  $g_j$  ad un nodo  $x_i$  allora esiste anche un cammino dal nodo  $g_j$  al nodo  $x_i$  di lunghezza non maggiore di  $n$ , e da ciò segue la tesi.  $\square$

Notiamo che se un sistema positivo è completamente raggiungibile, allora tutti gli stati in  $\mathbb{R}_+^n$  possono essere raggiunti nei primi  $n$  passi, mentre in assenza di completa raggiungibilità può accadere che il cono di raggiungibilità  $\mathcal{C}_k^R$  in  $k$  passi sia strettamente crescente al crescere di  $k$ .

Possiamo inoltre caratterizzare nel modo seguente i sistemi positivi raggiungibili.

---

**Lemma 3.4.1.** Se il sistema positivo a tempo discreto  $\Sigma_+ = (F, G, H)$  è completamente raggiungibile, allora la matrice  $\begin{bmatrix} F & G \end{bmatrix}$  contiene una sottomatrice  $n \times n$  monomia.

---

*Dimostrazione.* Per il Teorema 3.4.1, tra le colonne della matrice  $\mathcal{R}_n$  di raggiungibilità in  $n$  passi figurano le colonne di una matrice monomia, cioè esistono  $k_i \in \{1, \dots, n\}$  e  $\nu_i \in \{1, \dots, m\}$  tali che:

$$F^{k_i-1}g_{\nu_i} = \alpha_i e_i \quad \text{con } \alpha_i \geq 0, \text{ per } i = 1, \dots, n. \quad (3.6)$$

Se  $k_i = 1$  allora  $g_{\nu_i} = \alpha_i e_i$ , cioè la matrice  $G$  contiene almeno un vettore  $i$ -monomio, mentre se  $k_i \neq 1$  allora  $\alpha_i e_i = F^{k_i-1}g_{\nu_i} = F(F^{k_i-2}g_{\nu_i})$ , cioè la matrice  $F$  contiene almeno un vettore  $i$ -monomio.

Dato che la condizione (3.6) deve essere soddisfatta per ogni  $i = 1, \dots, n$  ciascun vettore  $i$ -monomio deve essere una colonna di  $F$  o di  $G$ .  $\square$

Dal Lemma 3.4.1 possiamo ricavare una sorta “forma canonica” alla quale i sistemi positivi ad un solo ingresso completamente raggiungibili possono essere sempre ricondotti.

**Corollario 3.4.1.** [Completa raggiungibilità per i sistemi ad un solo ingresso]

Il sistema positivo a tempo discreto  $\Sigma_+ = (F, g, h)$ , dove  $g$  è un vettore colonna, con  $\dim \Sigma_+ = n$ , è completamente raggiungibile se e solo se esiste un'opportuna matrice di permutazione  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tale che:

$$\left[ P^\top F P \quad | \quad P^\top g \right] = \left[ \begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & \dots & 0 & f_{1n} & g_1 \\ f_{21} & 0 & \dots & 0 & f_{2n} & 0 \\ 0 & f_{32} & & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & f_{n-1n} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & f_{nn-1} & f_{nn} & 0 \end{array} \right]$$

con  $g_1 > 0$ ,  $f_{i+1i} > 0$  per  $i = 1, 2, \dots, n-1$  e  $f_{jn} \geq 0$  per  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Questo permette una semplice verifica della raggiungibilità di un sistema ad un solo ingresso, ottenuta per semplice ispezione del grafo di influenza  $\mathfrak{D}(F, g)$ : la coppia  $\Sigma_+ = (F, g)$  è (completamente) raggiungibile se e solo se è possibile riordinare le variabili di stato in modo che:

- Esista un solo arco diretto dal nodo  $g$  al nodo  $x_1$ , ed un solo arco diretto da  $x_i$  a  $x_{i+1}$ ,  $\forall i = 1, \dots, n-1$ .
- Gli archi uscenti da  $x_n$  sono irrilevanti al fine della raggiungibilità.

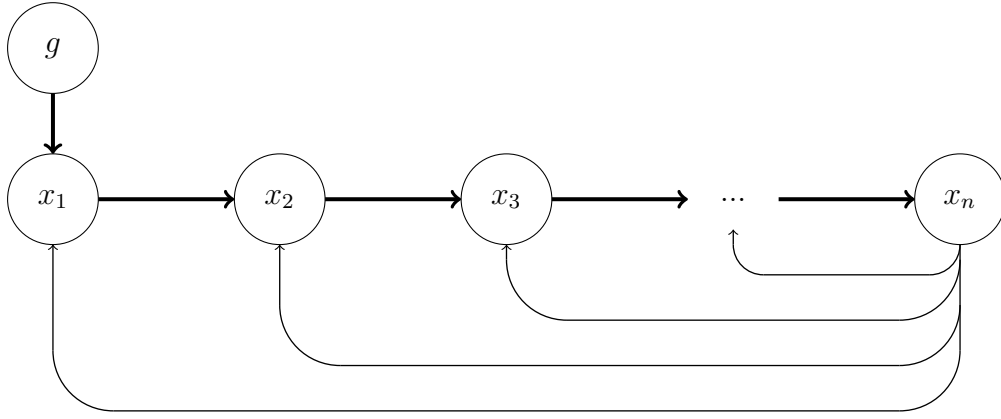
Per una rappresentazione di un grafo siffatto si veda la Figura 3.1.

### 3.4.2 Verifica della completa raggiungibilità attraverso il grafo di influenza

Vogliamo ora tradurre le condizioni di *completa raggiungibilità* per i sistemi positivi a tempo discreto in termini di grafo di influenza.

A tal fine ci poniamo nell'ipotesi semplificativa che la matrice di stato  $F$  sia priva di colonne nulle: questo significa che ogni vertice  $x_i \in \mathfrak{D}(F)$  possiede almeno un

Figura 3.1: Grafo di influenza di un sistema raggiungibile ad un solo ingresso: gli archi a linea spessa indicano le influenze necessarie per la raggiungibilità, mentre gli archi a linea sottile indicano le influenze irrilevanti.



arco uscente, eventualmente un autoanello.

In questo contesto faremo riferimento ai vertici indicati dalle colonne monomie (distinte) di  $G$  con il termine *sorgenti*, e indicheremo con  $\hat{S} = \{\hat{s}_1, \dots, \hat{s}_\ell\}$  tale insieme.

Vogliamo rienumerare i vertici di  $\mathfrak{D}(F, G)$  tramite il seguente algoritmo di “etichettamento”:

- Per ogni  $i = 1, \dots, \ell$ , si determini il più lungo *cammino deterministico*, composto da vertici distinti (si escludono quindi, in particolare, gli autoanelli), che ha inizio dalla sorgente  $\hat{s}_i$ :

$$\hat{s}_i \rightarrow \hat{s}_i^{(2)} \rightarrow \hat{s}_i^{(3)} \rightarrow \dots \rightarrow \hat{s}_i^{(k_i)}$$

L’attributo *deterministico* significa che per ogni vertice che fa parte del cammino (ad eccezione del nodo sorgente e del nodo terminale) esiste un solo arco entrante ed un solo arco uscente. Se ci sono due archi uscenti da  $\hat{s}_i$ , allora  $k_i = 1 < n$ . In tutti gli altri casi nodo sorgente e terminale sono distinti: il primo ha solo un arco uscente e il secondo ha solo un arco entrante.



- Si eliminino tutti i cammini deterministici inclusi in cammini deterministici più estesi: rimarranno così  $r \leq \ell$  cammini deterministici associati al grafo  $\mathcal{D}(F)$ , ciascuno avente inizio da una delle sorgenti  $s_i, \dots, s_r$ .
- Rinominiamo i vertici di in questo modo: attribuiamo a  $s_r$  l'indice  $n$  e ad i vertici successivi  $s_r^{(i)}$ , individuati dal cammino, indici decrescenti

$$\begin{aligned} s_r^{(2)} &\leftarrow n - 1 \\ s_r^{(3)} &\leftarrow n - 2 \\ &\vdots \\ s_r^{(k_r)} &\leftarrow n - k_r + 1 \end{aligned}$$

Consideriamo ora il cammino deterministico che ha inizio dalla sorgente  $s_{r-1}$ : attribuiamo a questo vertice l'indice  $n - k_r$  e ai vertici successivi  $s_{r-1}^{(i)}$ , individuati dal cammino, indici decrescenti

$$\begin{aligned} s_{r-1}^{(2)} &\leftarrow n - k_r - 1 \\ s_{r-1}^{(3)} &\leftarrow n - k_r - 2 \\ &\vdots \\ s_{r-1}^{(k_{r-1})} &\leftarrow n - k_r - k_{r-1} + 1 \end{aligned}$$

- Procedendo in questo modo per tutti gli  $r$  cammini deterministici, arriveremo a rinominare tutti i  $k$  (in generale vale  $k \leq n$ ) vertici che ne fanno parte. Agli altri vertici del grafo, si attribuiscono in modo arbitrario gli indici rimanenti  $1, 2, \dots, n - k$ .

Vogliamo dimostrare che il sistema  $\Sigma_+ = (F, G, H)$  è completamente raggiungibile se e solo se  $k \equiv n$ , cioè gli  $r$  cammini deterministici individuati formano un ricoprimento del grafo  $\mathcal{D}(F, G)$ .

Supponiamo che sia  $k < n$ , e indichiamo con  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  la matrice di permutazione che realizza la rienumerazione delle variabili del sistema, e  $Q \in \mathbb{R}^{r \times m}$  la matrice di permutazione che riordina le colonne di  $G$  in modo che le prime  $r$

siano gli  $r$  vettori monomi associati alle sorgenti  $s_1, \dots, s_r$ .

Otteniamo allora la seguente espressione per la matrice  $\left[ P^\top F P \parallel P^\top G Q \right]$

$$\left[ \begin{array}{c|c|c|c|c} \hat{F}_{00} & \begin{matrix} * & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & 0 & \cdots & 0 \\ * & 0 & \cdots & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} * & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & 0 & \cdots & 0 \\ * & 0 & \cdots & 0 \end{matrix} & \dots & \begin{matrix} * & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & 0 & \cdots & 0 \\ * & 0 & \cdots & 0 \end{matrix} & \parallel & \begin{matrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{matrix} \\ \hline \hat{F}_{10} & \begin{matrix} * & f_{12}^{(1)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & 0 & \cdots & f_{k_1-1k_1}^{(1)} \\ * & 0 & \cdots & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} * & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & 0 & \cdots & 0 \\ * & 0 & \cdots & 0 \end{matrix} & \dots & \begin{matrix} * & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & 0 & \cdots & 0 \\ * & 0 & \cdots & 0 \end{matrix} & \parallel & \begin{matrix} * & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ g_{k_1} & 0 & \cdots & 0 \end{matrix} \\ \hline \hat{F}_{20} & \begin{matrix} * & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & 0 & \cdots & 0 \\ * & 0 & \cdots & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} * & f_{12}^{(2)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & 0 & \cdots & f_{k_1-1k_1}^{(2)} \\ * & 0 & \cdots & 0 \end{matrix} & \dots & \begin{matrix} * & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & 0 & \cdots & 0 \\ * & 0 & \cdots & 0 \end{matrix} & \parallel & \begin{matrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g_{k_2} & \cdots & 0 \end{matrix} \\ \hline & \begin{matrix} \vdots \end{matrix} & \begin{matrix} \vdots \end{matrix} & \ddots & \begin{matrix} \vdots \end{matrix} & \parallel & \begin{matrix} \vdots \end{matrix} \\ \hline \hat{F}_{r0} & \begin{matrix} * & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & 0 & \cdots & 0 \\ * & 0 & \cdots & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} * & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & 0 & \cdots & 0 \\ * & 0 & \cdots & 0 \end{matrix} & \dots & \begin{matrix} * & f_{12}^{(r)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & 0 & \cdots & f_{k_r-1k_r}^{(r)} \\ * & 0 & \cdots & 0 \end{matrix} & \parallel & \begin{matrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & g_{k_r} \end{matrix} \end{array} \right] \hat{G}$$

dove  $f_{ii+1}^{(j)} > 0$  e  $g_{k_j} > 0$ ,  $\forall j = 1, 2, \dots, r$ , e  $\forall i = 1, 2 \dots k_j$ , mentre gli elementi indicati con  $*$  sono non negativi.

Dalle assunzioni precedentemente fatte, la matrice  $F$  è priva di colonne nulle e quindi in ciascuna  $*$ - colonna è presente almeno una componente non nulla.

Per la condizione 3.4.1 di completa raggiungibilità positiva, la matrice  $\left[ F \parallel G \right]$ , e quindi la matrice  $\left[ P^\top F P \parallel P^\top G Q \right]$ , contiene una sottomatrice monomia di dimensione  $n \times n$ .

Nella rienumerazione delle variabili effettuata notiamo che sono presenti  $k$  vettori monomi distinti:  $k - r$  nella matrice  $\left[ P^\top F P \right]$  e  $r$  nella matrice  $\left[ P^\top G Q \right]$ .

Dato che, per costruzione, nella sottomatrice  $\hat{G}$  e tra le  $*$ -colonne di  $\begin{bmatrix} P^\top FP \end{bmatrix}$  non c'è alcun vettore colonna monomio distinto dai  $k$  già individuati, i rimanenti  $n - k$  sono da ricercare tra le prime  $n - k$  colonne della matrice  $\begin{bmatrix} P^\top FP \end{bmatrix}$ .

Questo implica che la sottomatrice  $\hat{F}_{00}$  è non sigolare, e le sottomatrici  $\hat{F}_{i0}$  sono tutte nulle  $\forall i = 1, \dots, r$ . Osserviamo inoltre che, affinché vi sia un cammino di lunghezza  $t (\leq n)$  arbitraria da una qualche sorgente  $g_\ell$  ad un qualche vertice  $x_i$ , è necessario :

$$(P^\top FP)^t P^\top g_\ell = \alpha_i e_i$$

Per qualche  $i = 1, \dots, n - k$ , e dato che  $P^\top FP \gg 0$ , il vettore  $g_\ell \in P^\top FQ$  deve essere  $j$ -monomio per qualche  $j = 1, \dots, n - k$ , ed entriamo quindi in contraddizione con quanto precedentemente affermato.

Pertanto abbiamo provato che  $k \equiv n$ .

Nelle ipotesi in cui la matrice  $F$  contenga colonne nulle (cioè esista qualche vertice  $x_j$  dove  $j = 1, \dots, n$ , privo di archi uscenti) si perviene a delle conclusioni differenti ed è un caso da trattare separatamente (si veda Valcher [8]).

Concludiamo l'analisi della completa raggiungibilità dei sistemi positivi a tempo discreto affrontando quest'ultimo problema: data una matrice di stato non negativa  $F \geq 0$ , possiamo trovare una matrice di ingressi non negativa  $G \geq 0$ , con minor numero di colonne possibili, che assicuri la raggiungibilità del sistema?

La risposta a questo quesito è affermativa e il ragionamento precedentemente sviluppato porge un metodo per determinare una matrice  $G \geq 0$  con questi requisiti.

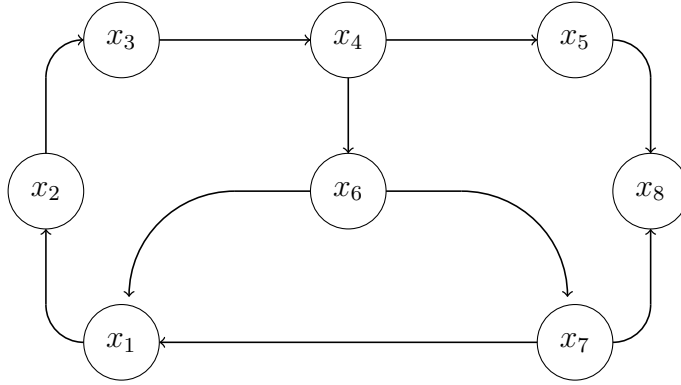
Consideriamo tutti i cammini deterministici che hanno inizio da ogni vertice  $x_i$ , con  $i = 1, \dots, n$  di  $\mathcal{D}(F)$  (per il momento non vengono considerate le sorgenti) e selezioniamo il minimo numero di questi cammini che consentono di “toccare” tutti i vertici del sottografo.

Siano  $x_{i1}, \dots, x_{i\ell}$  i vertici iniziali di questi cammini.

Imponendo  $G = [e_{i1} \mid \dots \mid e_{i\ell}] \geq 0$  otteniamo una coppia  $(F, G) \geq 0$  raggiungibile ed  $\ell$  è il (minimo) numero di ingressi necessari per la raggiungibilità.

Vediamo un esempio che chiarisce quanto sopra esposto.

**Esempio 3.4.** Consideriamo il seguente grafo di influenza  $\mathcal{D}(F)$  associato ad una matrice di stato non negativa  $F \geq 0$ .



È possibile individuare i seguenti cammini deterministici che hanno inizio da ciascun vertice  $x_i \in \mathcal{D}(F)$ , con  $i = 1, \dots, 8$ :

$$\begin{array}{ll}
 x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4 & x_5 \rightarrow x_8 \rightarrow x_7 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4 \\
 x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4 & x_6 \\
 x_3 \rightarrow x_4 & x_7 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4 \\
 x_4 & x_8 \rightarrow x_7 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4
 \end{array}$$

I cammini deterministici:

$$\begin{array}{ll}
 x_5 \rightarrow x_8 \rightarrow x_7 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 & x_6
 \end{array}$$

consentono di “ricoprire” tutto il grafo  $\mathcal{D}(F)$  e la matrice  $G = [e_5 \mid e_6]$  è la matrice con il minor numero di colonne che assicura la raggiungibilità del sistema che ha  $F$  come matrice di stato.

# Capitolo 4


## Il ranking di Google

La tecnica del *page ranking* rientra nel contesto più generale dell'*information retrieval* (IR), cioè l'insieme delle tecniche utilizzate per il recupero mirato dell'informazione in formato elettronico, dove per informazione intendiamo documenti o dati presenti nelle banche dati o nel web.

Per recuperare l'informazione i sistemi IR (che in genere sono motori di ricerca) prevedono:

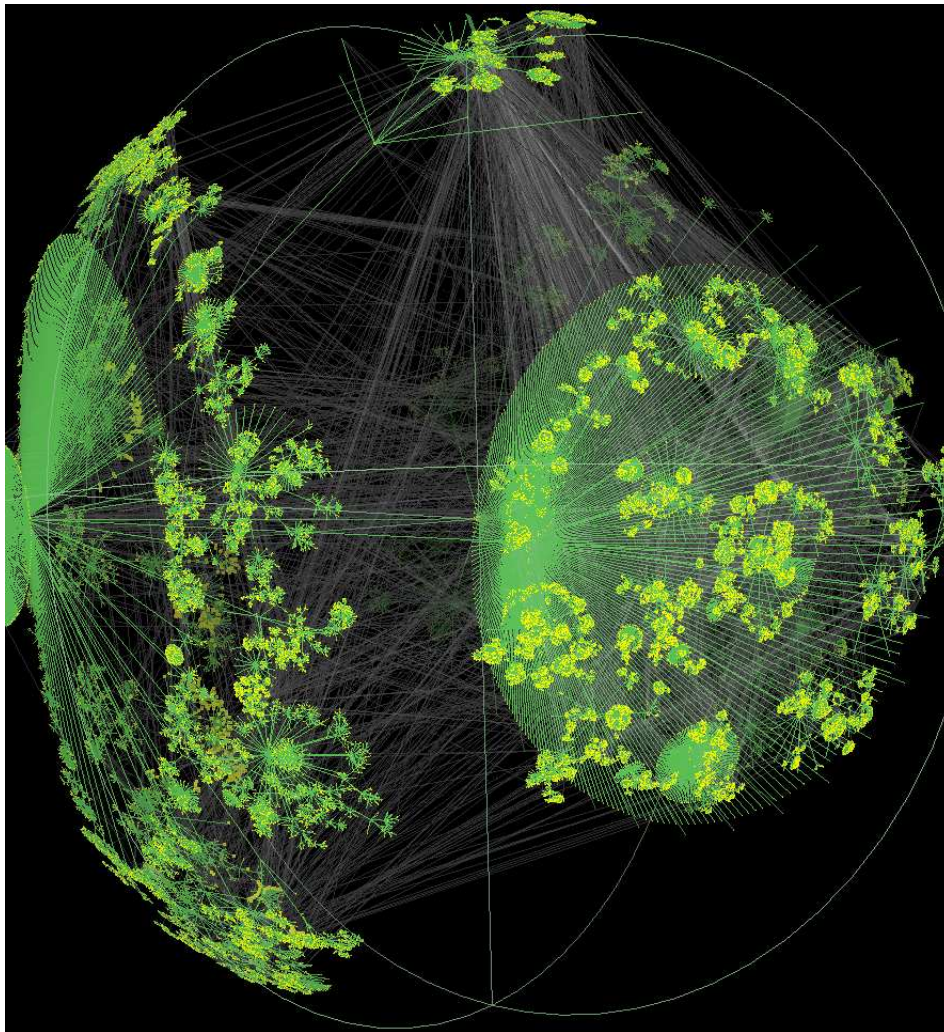
- una **query**, cioè una o più stringhe di parole chiavi che rappresentano l'informazione richiesta. Questo comando testuale viene digitato dall'utente e costituisce l'input del sistema.
- un **oggetto**, cioè l'entità che racchiude l'informazione.

Al momento della ricerca, viene esaminata la pertinenza degli oggetti presenti nella banca dati o nel web in rapporto alla *query* e il sistema IR fornisce in output un insieme di *record* che spesso rappresentano i surrogati delle informazioni contenute nei relativi oggetti.

Rimane allora il problema di stabilire l'ordine gerarchico con cui i *record* verranno presentati all'utente: ogni motore di ricerca possiede un peculiare algoritmo di ordinamento dei risultati, e in questo capitolo verrà esaminato il modello matematico sul quale si basa quello del motore di ricerca .

L'idea base del *ranking* di Google è quella di pensare le pagine web come oggetti dinamici: esse vengono create, aggiornate, eliminate continuamente, ed inoltre contengono dei riferimenti (*hyperlink*) ad altre pagine web, alle quali sono collegate. Alla luce di questa interpretazione è naturale rappresentare il web come un grafo, in cui ciascun nodo rappresenta una pagina elettronica e gli *hyperlink* individuano gli archi entranti o uscenti a seconda che una pagina riferisca o venga riferita da un'altra. La Figura 4.1 riporta una rappresentazione di questo imponente grafo (costituito da 532,102 nodi e 601,678 archi), implementata con un software Java.

Figura 4.1: Grafo di influenza associato ad un contenuto web [Munzner, Hyun]



A questo punto ogni pagina deve essere indicizzata tramite un opportuno valore (chiamato *PageRank*) tenendo conto delle relazioni, del peso dei collegamenti ipertestuali che sorreggono la struttura dello stesso *World Wide Web*. In modo ricorsivo definiremo una pagina “importante” se essa è riferita da altre pagine “importanti”.

Non basta, tuttavia, affermare che il valore di *PageRank* di una pagina web dipende dal numero di *hyperlink* che puntano in direzione di quella pagina.

Il valore di *PageRank* stabilisce secondo quale grado di probabilità un utente che effettua una determinata ricerca, muovendosi a cadenza fissa da un collegamento all'altro in maniera casuale, visiterà una determinata pagina.

Cominciamo allora a definire le variabili e le caratteristiche di questo sistema dinamico probabilistico: indichiamo con  $p$  (con  $0 \leq p \leq 1$ ) la probabilità che l'utente clicchi su un link una volta arrivato ad una certa pagina web, in tal caso  $1 - p$  è la probabilità che l'utente resti nella pagina web senza accedere ad un'altra.

Pertanto, la probabilità che l'utente passi dalla pagina  $i$  alla pagina  $j$  è:

$$\alpha_{ji} = \frac{p}{N_i} \geq 0$$

dove con  $N_i$  indichiamo il numero di link presenti nella pagina  $i$ . Supponiamo che la porzione del web cui l'utente può accedere sia costituita  $n$  pagine, e definiamo con  $x_i(k)$  la probabilità che l'utente si trovi all'istante  $k$  nella pagina  $i$ , con  $i = 1, \dots, n$ : la dinamica del sistema è governata dall'equazione  $x(k+1) = Ax(k)$ , dove:

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_i(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix}$$

e la matrice di stato è nella forma

$$A = \begin{bmatrix} 1-p & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & 1-p & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \alpha_{n-1n} \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn-1} & 1-p \end{bmatrix}.$$

Notiamo che la somma di tutti gli elementi su ciascuna colonna  $i$ -esima della matrice  $A$  è unitaria, infatti:

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{ji} = 1-p + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \alpha_{ji} = 1-p + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{p}{N_j} = 1-p + p = 1$$

cioè la matrice  $A$  è *stocastica* (per colonne) e verrà nel seguito chiamata matrice delle *probabilità di transizione*, in quanto regola l'evoluzione temporale dei vettori che esprimono la distribuzione di probabilità sui vari stati del sistema.

Inoltre, l'insieme delle probabilità  $x_i(k)$ , con  $i = 1, \dots, n$ , costituiscono proprio i valori di *PageRank* associati a ciascuna delle  $n$  pagine all'istante  $k$ : per questo motivo ci riferiremo allo stato  $x(k)$  come al vettore *PageRank* all'istante  $k$ .

Siamo di fronte ad un particolare tipo di sistema positivo a tempo discreto, chiamato *Catena di Markov*. Il punto di novità rispetto ai modelli precedentemente analizzati risiede nel fatto che la transizione da uno stato all'altro avviene su base probabilistica, anziché deterministica.

La teoria dei sistemi positivi a tempo discreto assicura che, al crescere del numero di passi  $k$ , il vettore *PageRank* converga verso un punto di equilibrio (cioè un opportuno multiplo positivo dell'autovettore di *Frobenius* del sistema) se la matrice  $A$  è primitiva: in tal caso il processo Markoviano è definito “regolare”. Inoltre il fatto che  $A$  sia stocastica, per il Teorema 2.2.3, implica che l'autovalore di *Frobenius*  $\lambda_F$  sia unitario.

Tuttavia, la convergenza ad un valore di equilibrio per il vettore *PageRank* non è assicurata qualora la matrice  $A$  non sia primitiva: ciò accade, ad esempio, quando essa presenta delle colonne nulle, cioè se una delle pagine non contiene

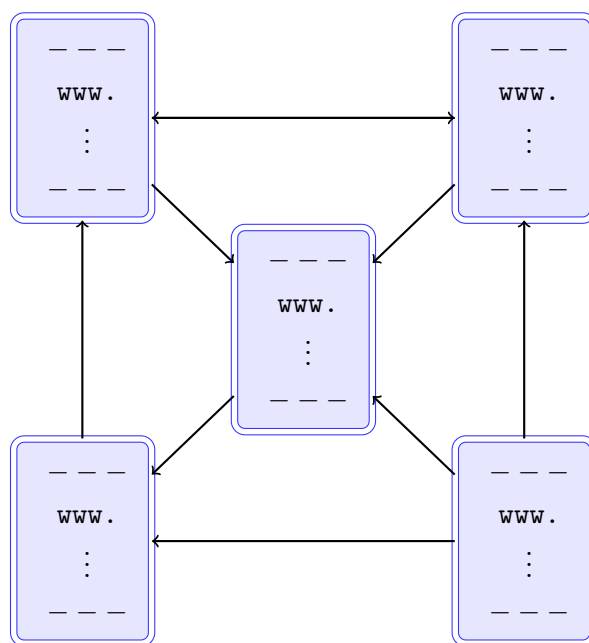


riferimenti ipertestuali ad altre pagine (questa situazione è peraltro piuttosto frequente).

Vedremo che, modificando opportunamente la matrice  $A$  il sistema converge ugualmente verso un unico valore di equilibrio.

Vediamo un semplice esempio di modellizzazione di una piccola rete web, in cui ogni pagina contiene almeno un link a delle pagine diverse.

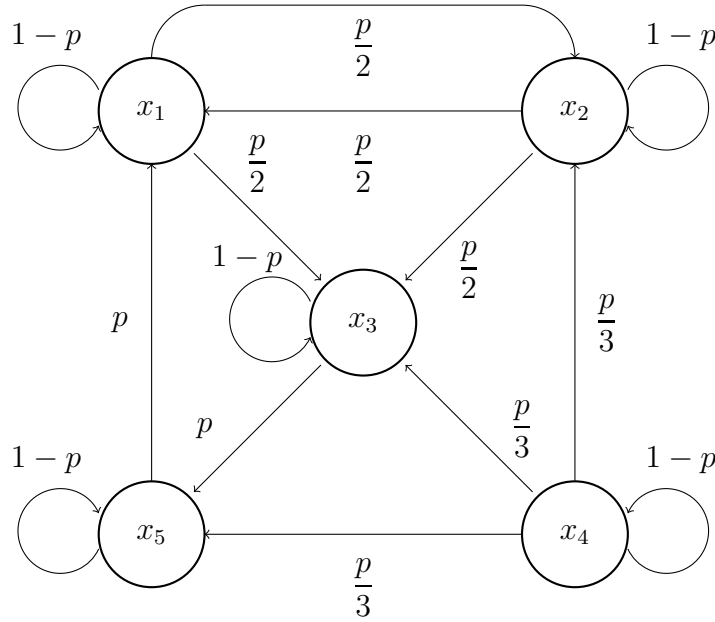
**Esempio 4.1.** Consideriamo un insieme di 5 pagine web così collegate:



Assegnando a ciascuna pagina una variabile  $x_i, i = 1, 2, \dots, 5$ , ricaviamo il grafo di struttura associato alla rete riportato in Figura 4.1 .

Notiamo innanzitutto che esiste un cammino che collega ogni coppia di nodi del grafo (dunque il sistema è irriducibile) ed inoltre la primitività del sistema è assicurata dalla Proposizione 1.5.1, in quanto il grafo contiene almeno un anello,

Figura 4.2: Grafo di influenza associato ad una piccola rete web



ad esempio  $(x_1, x_3), (x_3, x_5), (x_5, x_1)$ . La matrice delle *probabilità di transizione* é:

$$A = \begin{bmatrix} 1-p & \frac{p}{2} & 0 & 0 & p \\ \frac{p}{2} & 1-p & 0 & \frac{p}{3} & 0 \\ \frac{p}{2} & \frac{p}{2} & 1-p & \frac{p}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-p & 0 \\ 0 & 0 & p & \frac{p}{3} & 1-p \end{bmatrix}$$

Il punto di equilibrio  $x_F$ , ovvero l'autovettore di Frobenius, del sistema soddisfa all'equazione:

$$Ax_F = \lambda_F x_F = x_F \implies (A - I)x_F = 0 \implies x_F \in \ker(A - I)$$

Dalla precedente equazione si evince che  $x_F$  non dipende dalla probabilità  $p$  di visitare una determinata pagina, infatti:

$$\ker(A - I) = \ker \begin{bmatrix} -p & \frac{p}{2} & 0 & 0 & p \\ \frac{p}{2} & -p & 0 & \frac{p}{3} & 0 \\ \frac{p}{2} & \frac{p}{2} & -p & \frac{p}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & p & \frac{p}{3} & -p \end{bmatrix} = \ker \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -1 \end{bmatrix}$$

L'autovettore di Frobenius è (a meno di un fattore di scala):

$$x_F = \begin{bmatrix} 0.6489 \\ 0.3244 \\ 0.4867 \\ 0 \\ 0.4867 \end{bmatrix}$$

Il vettore *PageRank* di equilibrio è il vettore stocastico parallelo a  $x_F$ : imponendo  $\sum_{i=1}^5 x_i = 1$  otteniamo

$$x_F = \begin{bmatrix} 0.33 \\ 0.167 \\ 0.25 \\ 0 \\ 0.25 \end{bmatrix}$$

Osserviamo che il valore di *PageRank* assegnato alla pagina  $x_4$  è nullo in quanto l'utente non potrà mai accedere ad essa da altre pagine (non ha archi entranti).

È interessante notare come la pagina con più alta probabilità di essere visitata, cioè  $x_1$ , possieda un numero di archi entranti minore delle pagina  $x_3$ . Questo aspetto mette in evidenza che la pagina più linkata non possiede necessariamente il valore più elevato di *PageRank*: proprio questo è il motivo del successo del ranking di Google in quanto sarebbe possibile aumentare la visibilità di un sito semplicemente creando pagine fittizie che puntano ad esso.

Una successiva modifica al modello originale, messo a punto da Larry Page nel 1998, permise di risolvere il problema precedentemente menzionato, cioè che l'utente che effettua una determinata ricerca casuale spostandosi da un link ad un altro, si trovi in una pagina senza riferimenti ipertestuali (ad esempio un file pdf o un'immagine). I nodi associati a queste pagine vengono chiamati in letteratura *dangling nodes*.

La modifica consiste nell'introdurre un termine "perturbativo" alla matrice  $A$  delle *probabilità di transizione* tale che la matrice risultante sia *stocastica* e *primitiva*. In tal modo è ancora possibile parlare di convergenza del vettore *PageRank* verso un unico punto di equilibrio al crescere del numero di passi  $k$ , il cui valore può essere determinato con il metodo precedentemente analizzato.

Vediamo in dettaglio questo nuovo modello: supponiamo che l'utente visiti le pagine web saltando da un link ad un altro (come nel modello precedente), e che a cadenze fisse inserisca l'indirizzo della pagina web che visiterà al passo successivo nella riga di comando in maniera casuale. Quando questo avviene è come se l'utente venisse "teletrasportato" da una pagina all'altra, e da questa ricominci a ripercorrere gli *hyperlink* della struttura, fino al "teletrasporto" successivo.

Questo accorgimento assicura che, se l'utente si troverà a visitare un *dangling node*, non rimarrà indefinitamente in esso, bensì dopo un numero finito di passi verrà trasferito in maniera random su un'altro nodo della rete.

La nuova equazione di aggiornamento dello stato che permette di modellizzare questa nuova situazione è  $x(k+1) = Gx(k)$ , dove

$$G = \alpha A + (1 - \alpha) \frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}^\top$$

e con  $\mathbf{1}$  indichiamo il vettore di dimensione  $n \times 1$  i cui elementi valgono tutti uno e  $\alpha$  è un parametro compreso nell'intervallo  $[0, 1]$ .

La matrice  $G$  è chiamata *matrice di Google* ed è combinazione lineare convessa della matrice  $A$  delle *probabilità di transizione* in  $k$  passi con la matrice  $E = \frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}^\top$ .

Il parametro  $\alpha$  costituisce il rapporto tra le volte in cui l'utente percorre gli *hyperlink* e quelle in cui viene “teletrasportato”.

Notiamo inoltre che la matrice  $E$  è uniforme, il che significa che il “teletrasporto” avviene in maniera equiprobabile verso tutte le pagine.

Cominciamo ad analizzare le proprietà della matrice  $G$ :

- La matrice  $G$  è *stocastica* poiché è combinazione lineare convessa di due matrici stocastiche  $A$  ed  $E$ .
- La matrice  $G$  è *irriducibile* poiché ciascun elemento  $g_{ij} \geq 0$ , ovvero ci sono collegamenti da e verso tutte le pagine della rete.
- La matrice  $G$  è *primitiva* in quanto  $G^k \gg 0$  per  $k = 1$ , e dunque ha le proprietà di convergenza desiderate.

Il fattore  $\alpha$  entra in gioco nel rate asintotico del sistema, cioè nel numero di passi  $k$  necessari affinché il vettore *PageRank* si allinei all'autovettore di *Frobenius*. I suoi valori influenzano l'analisi di *sensitività* del sistema, cioè lo studio di come varia il punto di equilibrio a fronte di piccole perturbazioni dei dati: esso è di fondamentale importanza data l'estrema dinamicità della rete web. Per maggiori sviluppi su questo argomento si veda Meyer [6].

# Appendice

Per completare la dimostrazione del Teorema 2.2.2 vogliamo provare che l'insieme:

$$\Lambda_F = \{ \lambda \in \mathbb{R} : Fv \geq \lambda v, \exists v > 0 \}$$

*è non vuoto, limitato superiormente e chiuso.*

Il problema è più delicato di quanto non sembri a prima vista e, conseguentemente, la dimostrazione abbastanza lunga. Per questa ragione, per non spezzare il filo logico della dimostrazione del teorema di Perron, la prova di queste affermazioni è stata messa in Appendice.

Notiamo innanzitutto che  $\Lambda_F \neq \emptyset$  in quanto  $\lambda = 0 \in \Lambda_F$ . Infatti se  $F \gg 0$  e  $v > 0$  si trova  $Fv \gg 0$ , poiché  $Fv$  è combinazione lineare delle colonne di  $F$  secondo coefficienti (che sono le componenti di  $v$ ) non negativi (e almeno uno di essi è positivo). Di conseguenza,  $Fv \geq 0v$ .

Indichiamo ora con  $\ell_i$  la somma degli elementi di ciascuna riga  $i$ -esima della matrice  $F$ , e con  $\ell$  il massimo di questi valori, cioè:

$$\forall i = 1, \dots, n : \ell_i = \sum_{j=1}^n f_{ij} > 0 \quad \ell = \max[\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n]$$

Possiamo riscrivere il prodotto  $Fv$  nella maniera seguente:

$$Fv = \begin{bmatrix} f_{11}x_1 + f_{12}x_2 + \dots + f_{1n}x_n \\ \vdots \\ f_{k1}x_1 + f_{k2}x_2 + \dots + f_{kn}x_n \\ \vdots \\ f_{n1}x_1 + f_{n2}x_2 + \dots + f_{nn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (Fv)_1 \\ \vdots \\ (Fv)_k \\ \vdots \\ (Fv)_n \end{bmatrix}$$

La precedente scrittura permette di trovare un limite superiore al prodotto  $Fv$ , infatti ogni componente  $(Fv)_k$ ,  $\forall k = 1, 2, \dots, n$ , può essere così maggiorata:

$$(Fv)_k = \sum_{j=1}^n f_{kj}v_j \leq \sum_{j=1}^n f_{kj} \max[v_1, v_2, \dots, v_n] = \ell_k \max[v_1, v_2, \dots, v_n] \leq \ell \max[v_1, v_2, \dots, v_n]$$

Possiamo allora affermare che  $\ell$  costituisce un limite superiore di  $\Lambda_F$ . Infatti, se così non fosse  $\exists \epsilon > 0$  tale che  $\ell + \epsilon \in \Lambda_F$ , cioè si verificherebbe:

$$\exists v > 0 : Fv \geq (\ell + \epsilon)v \Rightarrow (Fv)_k \geq (\ell + \epsilon)v_k \quad \forall k = 1, 2, \dots, n$$

E scegliendo  $k$  pari all'indice (che potrebbe non essere unico) della massima componente di  $v > 0$ , cioè  $v_k = \max[v_1, v_2, \dots, v_n] > 0$ , dai precedenti risultati perveniamo alla seguente contraddizione:

$$\ell \max[v_1, v_2, \dots, v_n] = \ell v_k \geq (Fv)_k \geq (\ell + \epsilon)v_k \Rightarrow \ell \geq \ell + \epsilon$$

Quindi  $\forall \epsilon > 0$ , si ha che  $\ell + \epsilon \notin \Lambda_F$  e dunque  $\ell$  costituisce un limite superiore per  $\Lambda_F$ .

Poiché abbiamo provato che l'insieme  $\Lambda_F$  è limitato superiormente, possiamo concludere che esso ammette estremo superiore, che indichiamo con  $\lambda_0$ :

$$0 < \lambda_0 = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \{ \lambda : Fv \geq \lambda v, \exists v > 0 \} < +\infty$$

Fissiamo  $v_1 \in \mathcal{F}_\lambda$  e consideriamo l'insieme  $\Lambda_F^{(v_1)} = \{ \lambda \in \mathbb{R} : Fv_1 \geq \lambda v_1 \}$ : possiamo notare che, se  $\lambda \in \Lambda_F^{(v_1)}$  allora ogni altro scalare  $\gamma \leq \lambda \in \Lambda_F^{(v_1)}$ , infatti la disuguaglianza continua a valere diminuendo arbitrariamente il termine di destra. Quindi l'insieme  $\Lambda_F^{(v_1)}$  è una semiretta chiusa inferiormente illimitata, cioè:

$$\Lambda_F^{(v_1)} = \{ \lambda \in \mathbb{R} : Fv_1 \geq \lambda v_1 \} = (-\infty, \lambda_1] , \exists \lambda_1 \in \Lambda_F. \quad (4.1)$$

A questo punto al variare di  $v_i$  nell'insieme ammissibile  $\mathcal{F}_\lambda$  possiamo ricavare tutti i valori  $\lambda \in \Lambda_F$ . In particolare possiamo esprimere questo insieme come unione di un numero (infinito) di insiemi chiusi del tipo (4.1):

$$\Lambda_F = \bigcup_{v_i \in \mathcal{F}_\lambda} \Lambda_F^{(v_i)}.$$

Infatti se consideriamo gli insiemi  $\Lambda_F^{(v_1)} = (-\infty, \lambda_1]$  e  $\Lambda_F^{(v_2)} = (-\infty, \lambda_2]$ , possiamo concludere che  $\lambda = \max[\lambda_1, \lambda_2] \in \Lambda_F$ , in quanto la disuguaglianza  $Fv \geq \lambda v$  è verificata da *almeno* un vettore dell'insieme  $\mathcal{F}_\lambda$ .

Dato che l'unione infinita di insiemi chiusi non è, in generale, un insieme chiuso, dobbiamo provare che  $\Lambda_F$  è effettivamente un insieme chiuso. A tal fine è necessario ricorrere alla definizione di  $\Lambda_F$ : vogliamo mostrare che  $\lambda_0 = \sup \Lambda_F \in \Lambda_F$ , cioè che l'elemento  $\lambda_0$ , che rappresenta un punto di *accumulazione* per l'insieme  $\Lambda_F$  (in quanto, per definizione di estremo superiore, è possibile trovare punti di  $\Lambda_F$  in ogni semi-intorno sinistro di  $\lambda_0$  arbitrariamente piccolo) è in realtà un elemento di  $\Lambda_F$ .

Introduciamo come strumento ausiliario alla dimostrazione l'insieme:

$$\mathcal{B}_+ = \{v \in \mathbb{R}^n : \|v\| = 1\} \cap \mathcal{F}_\lambda,$$

dove con  $\|\cdot\|$  indichiamo la norma euclidea in  $\mathbb{R}^n$ . Tale insieme comprende tutti i punti di  $\mathcal{F}_\lambda$  a distanza unitaria dall'origine (cioè che appartengono alla sfera di raggio unitario centrata nell'origine). È immediato riconoscere che vale anche:

$$\mathcal{B}_+ = \{v \in \mathbb{R}^n : \exists y \in \mathcal{F}_\lambda : v = \frac{y}{\|y\|}\}$$

essendo sufficiente notare che  $y \in \mathcal{F}_\lambda$  implica banalmente  $\|y\| > 0$ , in quanto  $y$  non può avere tutti gli elementi nulli.

Il vantaggio di ricorrere all'insieme  $\mathcal{B}_+$  risiede nel fatto che esso è un *compatto*, proprietà non di pertinenza invece dell'originario insieme  $\mathcal{F}_\lambda$ , e dalla seguente osservazione

$$Fv \geq \lambda v \ (v \in \mathcal{F}_\lambda) \Leftrightarrow F \frac{v}{\|v\|} \geq \lambda \frac{v}{\|v\|} \left( \frac{v}{\|v\|} \in \mathcal{B}_+ \right)$$



da cui consegue che la definizione dell'insieme  $\Lambda_F$  non si altera se sostituiamo l'originario insieme  $\mathcal{F}_\lambda$  con la sfera unitaria positiva. Per il fatto già menzionato che  $\Lambda_F$  è in realtà una semiretta, ogni  $\lambda < \lambda_0$  appartiene a  $\Lambda_F$ , cioè

$$\forall n = 1, 2, 3, \dots \exists v_n \in \mathcal{B}_+ : Fv_n \geq \left( \lambda_0 - \frac{1}{n} \right) v_n$$

dove  $\{v_n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , indica una successione di vettori di  $\mathcal{B}_+$ .

Dalle proprietà dei compatti, dalla successione  $\{v_n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , definita in un compatto possiamo estrarre una sottosuccessione convergente, cioè esiste una funzione che seleziona un opportuno sottoinsieme degli indici  $n(k) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tale che  $\{v_{n(k)}\}$  converge ad un vettore limite che indichiamo con  $v_0 \in \mathcal{B}_+$  al divergere di  $k$ . Dalla relazione precedente, valutata per  $n = n(k)$ , si ha

$$\forall k = 1, 2, 3, \dots : Fv_{n(k)} \geq \left( \lambda_0 - \frac{1}{n(k)} \right) v_{n(k)}, \text{ ed inoltre } v_{n(k)} \text{ converge a } v_0 \in \mathcal{B}_+.$$

Ma ora sia il primo che il secondo membro ammettono limite per  $k \rightarrow +\infty$ , e quindi, valendo la disuguaglianza precedente per ogni  $k$ , vale anche al limite e risulta

$$Fv_0 \geq \lambda_0 v_0,$$

il che prova la tesi, cioè che l'estremo superiore  $\lambda_0$  appartiene all'insieme ed è quindi un massimo, cioè:

$$0 < \lambda_0 = \max_{\lambda \in \mathbb{R}} \{ \lambda : Fv \geq \lambda v, \exists v > 0 \} < +\infty$$

# Bibliografia

- [1] Lorenzo Farina. *Modelli Dinamici per Ingegneria Gestionale*. URL: <http://www.dis.uniroma1.it/~farina/Didattica>.
- [2] Lorenzo Farina e Sergio Rinaldi. *Sistemi lineari positivi*. CittàStudi, 1995.
- [3] Ettore Fornasini. *Sistemi Positivi*. 2009. URL: <http://www.dei.unipd.it/~fornasini>.
- [4] Ettore Fornasini e Giovanni Marchesini. *Appunti di Teoria dei Sistemi*. Edizioni Libreria Progetto, 1994.
- [5] David G. Luenberger. *Introduction to Dynamic Systems: Theory, Models, and Applications*. Wiley Sons, 1979.
- [6] Carl D. Meyer. *Google's PageRank and Beyond : The Science of Search Engine Rankings*. Princeton University Press, 2006.
- [7] Sergio Rinaldi e Carlo Piccardi. *Teoria dei sistemi lineari*. Torino: Edizioni CittàStudi, 1998.
- [8] M.E. Valcher. “Controllability and reachability criteria for discrete time positive systems”. In: *International Journal of Control* 65 (1996).